

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ШИРОКОСМУГОВІ СИГНАЛИ В СИСТЕМАХ ТЕХНІЧНОГО ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ. ЧАСТИНА І

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра
за спеціальністю 125 «Кібербезпека»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Ширококугові сигнали в системах технічного захисту інформації: Лабораторний практикум. Частина I [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здоб. ступеня магістра за спеціальністю 125 «Кібербезпека» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: С. М. Куш, Д. О. Прогонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,30 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 77 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 2 від 18.10.2018 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-технічного інституту
(протокол № 10/2018 від 26.09.2018 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ШИРОКОКУГОВІ СИГНАЛИ В СИСТЕМАХ ТЕХНІЧНОГО ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ. ЧАСТИНА I

Укладачі: *Куш Сергій Миколайович, канд. техн. наук, доц.
Прогонов Дмитро Олександрович, канд. техн. наук*

Відповідальний редактор *Прогонов Дмитро Олександрович, канд. техн. наук*

Цикл лабораторних робіт з дисципліни “Ширококугові сигнали” складається з трьох частин, які містять у собі сім робіт. Цикл лабораторних робіт охоплює основні розділи теоретичного курсу. Виконання даного циклу робіт на ПК з використанням сучасного програмного забезпечення (пакетів Matlab, Mathcad), дозволить набути навички сучасних методів досліджень складних сигналів в умовах сильних завад, що допоможе кращому засвоєнню теоретичних положень, викладених в лекціях, навчальній та науковій літературі.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

АКФ – Автокореляційна функція
ВКФ – Взаємна кореляційна функція
ДПУ – Дискретне перетворення Уолша
ДПФ – Дискретне перетворення Фур'є
ДПХ – Дискретне перетворення Хаара
ШПУ – Швидке перетворення Уолша
ШПФ – Швидке перетворення Фур'є

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ І ОФОРМЛЕННЯ ПРОТОКОЛІВ

Кожна лабораторна робота виконується студентами індивідуально в комп'ютерному класі, відповідно до розкладу. Номер варіанту виконуваної лабораторної роботи вибирається студентами із завдання до кожної лабораторної роботи, відповідно до його порядкового номеру в журналі групи.

Перед виконанням лабораторних робіт студенти повинні вивчити теоретичний матеріал за темою роботи і виконати домашнє завдання в повному обсязі відповідно до вимог, викладених у даних Вказівках. За час підготовки домашнього завдання необхідно:

- детально продумати хід виконання роботи;
- вибрати найбільш просту і зручну форму представлення сигналу;
- застосувати нормування параметрів;
- вибрати найбільш придатне представлення ряду Фур'є або інших функціональних залежностей;
- записати всі необхідні розрахункові формули;
- якісно побудувати графіки для очікуваних результатів.

Студентам, що не працювали раніше з пакетом Mathlab/Simulink, необхідно ознайомитися основними можливостями пакета, особливостями введення і редагування формул, основними розрахунками і поданням результатів (у тому числі і відображення графіків).

Умовою допуску до виконання лабораторної роботи є наявність правильно виконаного домашнього завдання і позитивних результатів контрольної роботи, що проводиться перед початком лабораторної роботи. До виконання лабораторних робіт не допускаються студенти, які спізнилися до початку їхнього виконання, які отримали незадовільну оцінку з контрольної роботи чи не здали цілком оформлений протокол попередньої роботи.

Лабораторна робота вважається виконаною після затвердження викладачем всіх отриманих у ході її виконання результатів, що відзначається в журналі обліку робіт. Після виконання лабораторної роботи її результати можуть бути скопійовані за допомогою одного з текстових редакторів і записані на відповідний носій для наступного оформлення протоколу виконання лабораторної роботи. Рекомендується використання свої ноутбуків.

Повністю оформлений протокол лабораторної роботи подається викладачу на наступному занятті. Умовою одержання заліку за курс лабораторних робіт є своєчасний захист робіт студентами. Якщо студент до кінця семестру не здасть і не захистить усі лабораторні роботи, він не буде допущений до здачі іспиту за курсом.

Теоретична частина, наведена в даних методичних вказівках, може використовуватись під час виконання курсової роботи.

Лабораторна робота №1

Представлення сигналів в базисі несинусоїдальних ортогональних функцій. Узагальнений ряд Фур'є. Функції Радемахера. Функції Хаара. Представлення сигналу зі скінченною енергією в базисі функцій Хаара.

Мета роботи: Вивчення особливостей кусочно-постійних ортогональних функцій Радемахера та Хаара. Отримання практичних навичок розрахунку спектрів складних сигналів, використовуючи перетворення Хаара.

Теоретичні відомості

Узагальнений ряд Фур'є для періодичних неперервних функцій

Для сигналу $s(t)$ зі скінченною енергією:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty$$

узагальнений ряд Фур'є у вибраному базисі $\{\varphi_n\}$ може бути представлений у такому вигляді [7]:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \varphi_n(t),$$

де C_n – коефіцієнт, що визначає спектр сигналу; $\{\varphi_n\}$ – система ортонормованих функцій (базис), причому для дійсних функцій, ортонормованих на інтервалі $[-T/2, +T/2]$ можна записати

$$\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_n(t) \cdot \varphi_k(t) dt = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Коефіцієнти C_n визначаються наступним чином:

$$C_n = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \varphi_n(t) dt.$$

Для мінімізації часу обчислень, у загальному випадку, необхідно вибирати систему базисних функцій найбільш узгоджену по формі з сигналом, що досліджується. Причому необхідно також враховувати можливість більш

простої апаратної чи програмної реалізації базису. Для імпульсних сигналів представляє інтерес розклад сигналів у базисах функцій Хаара, Уолша та ін.

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ)

Спектральна щільність $S(w)$ дискретного сигналу $x(nT_a)$ описується виразом [8]:

$$S(jw) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) e^{-jwnT_a}, \quad (1.1)$$

де n – номер дискретного відліку неперервної функції; T_a – період дискретизації неперервної функції $x(t)$.

Відповідно до виразу (1.1) спектр дискретного сигналу є суцільним. Але таким він буває тільки лише за умови, що обсяг вибірки дискретного сигналу нескінченний. На практиці вибірка відліків сигналу завжди скінчена. Крім того, з багатьох причин бажано обчислювати перетворення Фур'є на комп'ютері. Це означає, що скінченою є не тільки вибірка дискретних відліків сигналу, але і відповідне цій вибірці число гармонік спектра дискретного сигналу.

З N даних відліків можна одержати амплітуди і фази для $N/2$ дискретних частот, що знаходяться в інтервалі від $f = 0$ до $f = f_a/2$, де f_a – частота дискретизації, що дорівнює $f_a = 1/T_a$. Згідно до теореми Котельникова частота дискретизації $f_a = 2f_{\max}$, де f_{\max} – найвища частота в спектрі сигналу.

Відповідні спектральні лінії повторюються на інтервалі від $f_a/2$ до f_a . В області від $f = 0$ до $f = f_a$ можна побудувати N ліній для частот

$$w_k = \frac{2\pi}{NT_a} k,$$

де $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Якщо в рівнянні (1.1) замінити w на w_k , то одержимо рівняння цілком дискретне як за часом, так і по частоті і тому зручне для обчислення на комп'ютері.

$$S(jw_k) = S(j \frac{2\pi}{NT_a} k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) e^{-jw_k nT_a} ;$$

$$S(jwk) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) e^{-j2\pi kn / N} , \text{ де } k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Для обчислення $f(nT_0)$ застосовуються зворотне перетворення Фур'є:

$$f(nT_a) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(jwk) \cdot e^{j2\pi kn / N} , \text{ де } n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Швидке перетворення Фур'є (ШПФ)

Класичні форми прямого і зворотного ДПФ прості і легко реалізуються на комп'ютері. Однак їхнє практичне застосування обмежується великими обсягами обчислень, що ростуть у квадратичній залежності від обсягу вибірки N . Так, якщо число відліків часової функції $x(t)$ складає N , то повний спектр N -мірної послідовності дискретних сигналів визначається за допомогою приблизно N^2 комплексних операцій множення і додавання. При досить великих N може виявитися, що ресурсу навіть потужних комп'ютерів недостатньо для обчислення спектру в реальному часі (тобто в темпі надходження вхідних даних).

Існують різні способи скорочення обсягу обчислень при визначенні дискретного спектру, що приводять до алгоритмів швидкого перетворення Фур'є. Алгоритми ШПФ засновані на усуненні надмірності обчислень. Покажемо це на прикладі.

Припустимо, що потрібно розрахувати число A

$$A = ac + ad + bc + bd$$

У записаному вигляді розрахунок містить чотири операції множення і три додавання. Якщо число A потрібно використовувати багато разів для різних наборів даних, то його представляють в еквівалентній формі:

$$A = (a+b) (c+d)$$

яка вимагає виконання лише однієї операції множення і двох операцій додавання.

Основна ідея ШПФ полягає в поділі заданої N -мірної послідовності вхідних сигналів на дві більш короткі послідовності, ДПФ яких можна скомбінувати таким чином, щоб вийшло ДПФ заданої N -мірної послідовності. Так, наприклад, якщо N – парне, а задана N -мірна послідовність розбита на дві $N/2$ -мірні послідовності, то для обчислення N -мірного ДПФ буде потрібно $(N/2)^2 \cdot 2 = N^2/2$ комплексних операцій множення, тобто вдвічі менше в порівнянні з прямим обчисленням ДПФ, де множник $(N^2/2)$ дорівнює числу множень, необхідних для визначення $(N/2)$ -мірного ДПФ, а множник 2 відповідає двом ДПФ, що повинні бути обчислені. Цю операцію можна повторити, обчислюючи замість $(N/2)$ -мірного ДПФ дві $(N/4)$ -мірні ДПФ (припускаючи, що $(N/2)$ – парне) і скорочуючи тим самим обсяг обчислень ще в два рази. Виграш у два рази є приблизним, оскільки не враховується, яким чином із ДПФ меншого розміру утвориться N -мірне ДПФ.

Функції Радемахера

Неперервні функції Радемахера та їх представлення

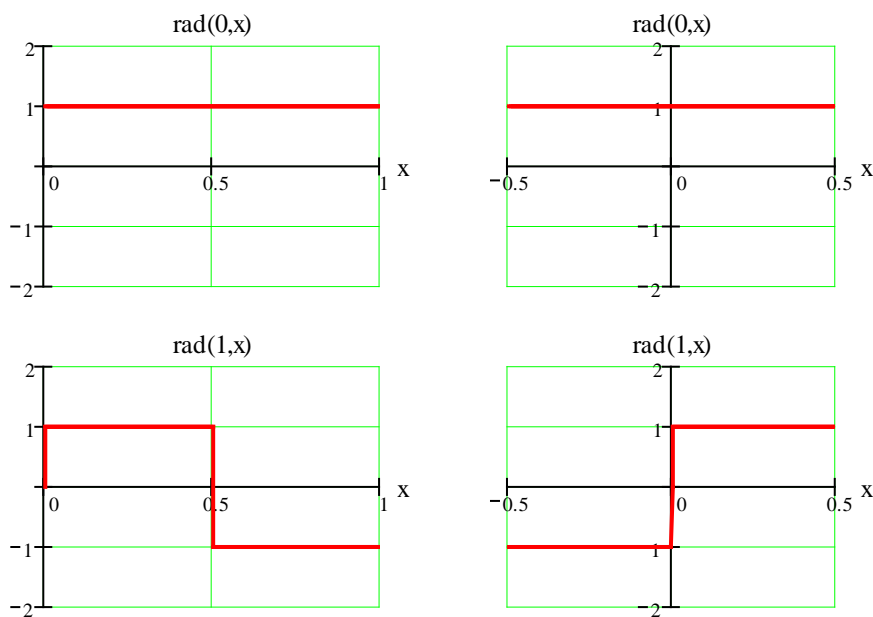
Функції Радемахера складають неповну систему ортонормованих функцій, що обмежує їхнє застосування. Але їх широке використання обумовлене тим, що на їх основі можна одержати повні системи функцій, наприклад, системи функцій Хаара й Уолша. Безперервна функція Радемахера з індексом m , що

позначається як $\text{rad}(m,x)$, має вигляд послідовності прямокутних імпульсів, що містить 2^{m-1} періодів на інтервалі $[0;1)$ і приймає значення $+1$ або -1 . Винятком є $\text{rad}(0,x)$, що має вигляд одиничного імпульсу. Функції Радемахера періодичні з періодом 1, тобто $\text{rad}(m,x) = \text{rad}(m,x+1)$. Крім того, вони періодичні і на більш коротких інтервалах: $\text{rad}(m, x + n \cdot 2^{1-m}) = \text{rad}(m, x)$, $m = 1, 2, \dots$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Їх можна одержати за допомогою рекурентного співвідношення: $\text{rad}(m, x) = \text{rad}(1, 2^{m-1} x)$,

$$\text{де } \text{rad}(1, x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 0.5) \\ -1, & x \in [0.5; 1) \end{cases}.$$

Одержати функції Радемахера можна також за допомогою наступного співвідношення: $\text{rad}(m, x) = \text{sign}(\sin(2^m \cdot \pi \cdot x))$.

Перші чотири функції Радемахера на різних інтервалах представлені на рис.1.1 а, б.



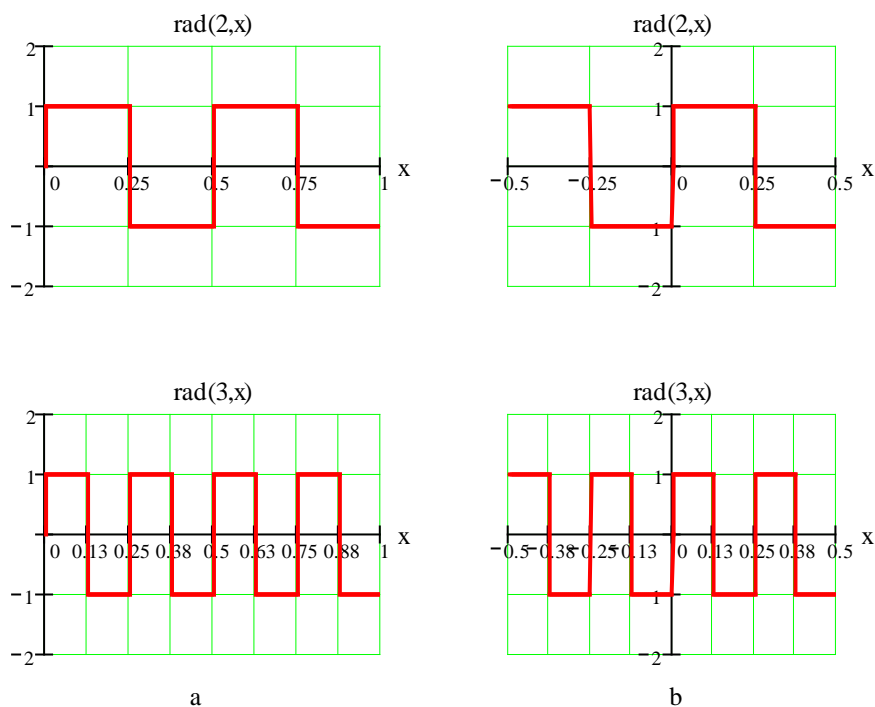


Рис. 1.1. Перші чотири неперервні функції Радемахера:
а) на інтервалі $[0; 1)$; б) на інтервалі $[-0.5; 0.5)$;

Розглянемо розклад функції $f(x)$, заданої виразом (1.2), у базисі функцій Радемахера. Для цього використаємо загальну формулу (1.3), що представлена нижче.

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{при } x \in [0; 0.125) \text{ и } -6 & \text{при } x \in [0.875; 1) \\ 0 & \text{при } x \in [0.125; 0.25) \cup [0.75; 0.875) \\ 2 & \text{при } x \in [0.25; 0.375) \text{ и } -2 & \text{при } x \in [0.625; 0.75) \\ -4 & \text{при } x \in [0.375; 0.5) \text{ и } 4 & \text{при } x \in [0.5; 0.625) \end{cases} \quad (1.2)$$

$$f(t) = A_0 \cdot \text{rad}(0,x) + A_1 \cdot \text{rad}(1,x) + \dots + A_N \cdot \text{rad}(N,x), \quad (1.3)$$

$$\text{де } A_i = \int_0^1 f(x) \cdot \text{rad}(i,x).$$

Розрахунки виконаємо в програмі Mathcad. Результати роботи програми і графічне представлення наведені нижче:

n	0	1	2	3
A_n	0	1	2	3

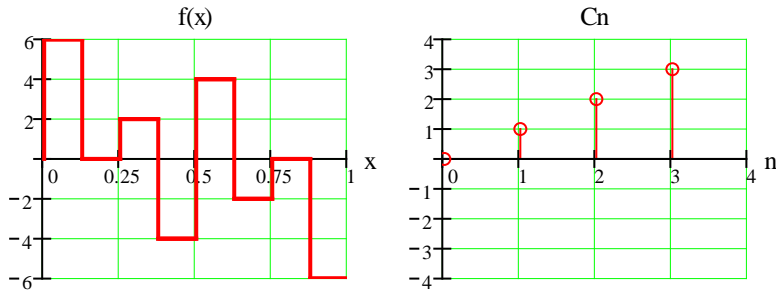


Рис.1.2. Приклад розкладу функції $f(x)$, заданої виразом (1.2), в базисі функцій Радемахера

Дискретні функції Радемахера

Дискретні функції Радемахера є відліками безперервних функцій Радемахера. Кожен відлік розташований у середині зв'язаного з ним елемента безперервної функції. Позначаються дискретні функції Радемахера як $\text{Rad}(m, x)$.

Для дискретних функцій Радемахера зручно використовувати матрицю, кожен рядок якої є дискретною функцією Радемахера. Наприклад, для третьої діади ($m=3$) маємо:

$$R(3) = \begin{vmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Rad}(0, x) \\ \text{Rad}(1, x) \\ \text{Rad}(2, x) \\ \text{Rad}(3, x) \end{matrix}$$

де для зручності "+1" позначено як "+", а "-1" як "-".

Функції Хаара

Неперервні функції Хаара та їх представлення

Нескінченна послідовність неперервних функцій Хаара $\{har(r, m, x)\}$ складає періодичну, ортонормовану і повну систему функцій. Широке поширення функції Хаара одержали у вейвлет аналізі і широко застосовуються для

стиску зображень. Рекурентне співвідношення, що дає можливість сформувати безперервну функцію $har(r, m, x)$, має вигляд [10]:

$$har(0, 0, x) = 1, \quad x \in [0; 1];$$

$$har(r, m, x) = \begin{cases} 2^{r/2}, \frac{m-1}{2^r} \leq x < \frac{m-1/2}{2^r}; \\ -2^{r/2}, \frac{m-1/2}{2^r} \leq x < \frac{m}{2^r}, \end{cases}$$

де $0 \leq r < \log_2 N$ і $1 \leq m \leq 2^r$, N - загальна кількість функцій. Перші вісім функцій Хаара представлені на рис. 1.3.

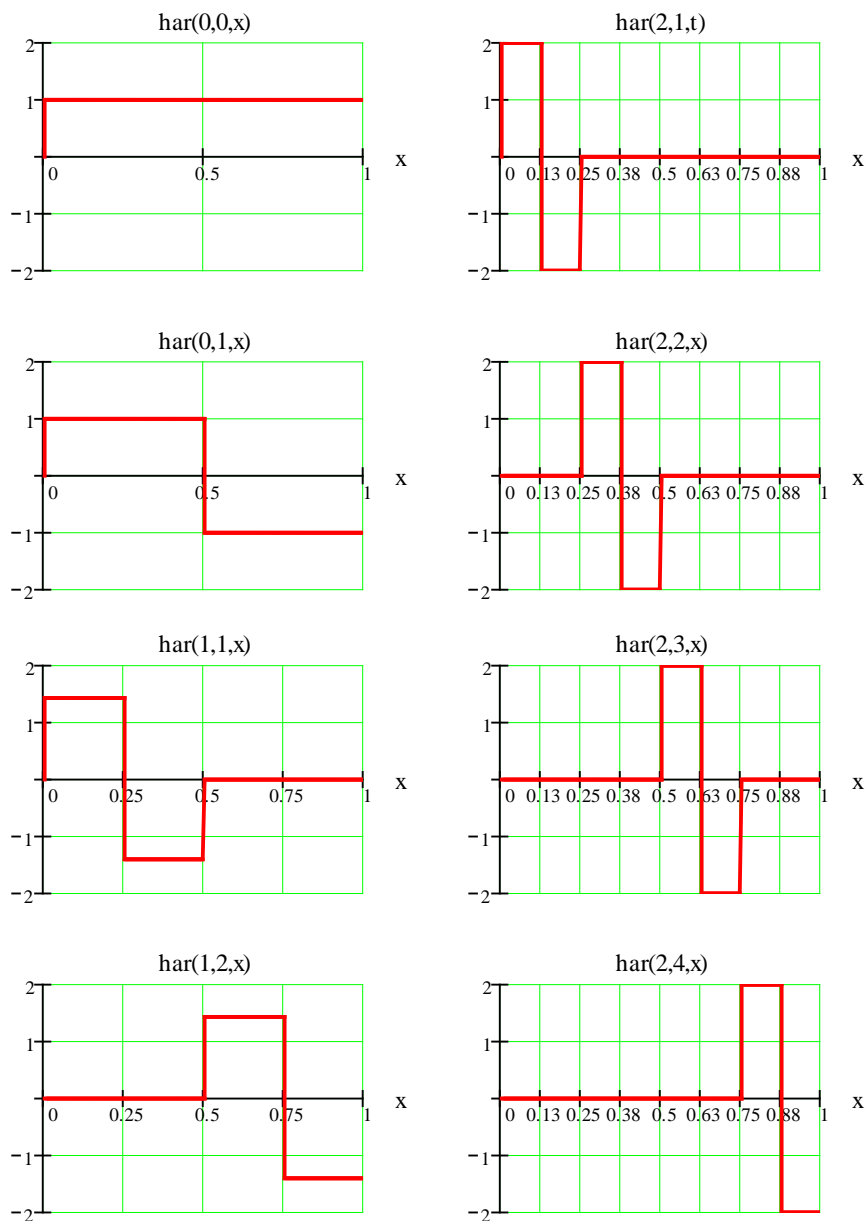


Рис.1.3. Перші вісім неперервних функції Хаара

Дискретні функції Хаара

Аналогічно дискретним функціям Радемахера, дискретні функції Хаара є відліками неперервних функцій Хаара. Кожен відлік розташований у середині зв'язаного з ним елемента неперервної функції, що виключає накладення додаткових вимог. Позначаються дискретні функції Хаара як $Har(r, m, x)$.

Побудуємо матрицю дискретних значень функцій Хаара для $N = 2^3 = 8$, у якій кожен рядок відповідає функції Хаара.

$$H(3) = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \begin{array}{l} Har(0,0,x) \\ Har(0,1,x) \\ Har(1,1,x) \\ Har(1,2,x) \\ Har(2,1,x) \\ Har(2,2,x) \\ Har(2,3,x) \\ Har(2,4,x) \end{array}$$

При цифровій обробці сигналів, вейвлет аналізі, стиску зображень, аналізі і синтезі логічних функцій, часто застосовуються ненормовані функції Хаара $\tilde{h}(r, m, x)$, $\tilde{H}(r, m, x)$, які на окремих ділянках приймають одне з трьох значень: +1; 0; -1. Матриця дискретних значень ненормованих функцій Хаара представлена в прикладі виконання лабораторної роботи.

Перетворення Хаара

Будь-яку функцію $f(x)$, що інтегрується на інтервалі $0 \leq x < 1$, можна представити рядом Фур'є по системі функцій Хаара:

$$f(x) = C(0,0) \cdot har(0,0,x) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{2^r} C(r,m) \cdot har(r,m,x), \quad (1.3)$$

де $n = \log_2 N$.

Коефіцієнти ряду (1.3) $C(r, m)$ визначаються за наступним виразом:

$$C(r, m) = \int_0^1 f(x) \cdot har(r, m, x) dx. \quad (1.3a)$$

Дискретне перетворення Хаара (ДПХ)

Для цифрових методів спектрального аналізу найбільший інтерес представляють дискретні функції Хаара (ДФХ).

Спочатку розглянемо випадок ДФХ $H(r, m, k)$, представлених відліками нормованих неперервних функцій Хаара $h(r, m, x)$, де $k \in [0, N-1]$, N – кількість відліків. Коефіцієнти розкладу $C(r, m)$ визначаються, як:

$$C(r, m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \cdot Har(r, m, k), \quad (1.4)$$

а значення $S(k)$ можна визначити, використовуючи ряд:

$$S(k) = C(0, 0) \cdot Har(0, 0, k) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{2^r} C(r, m) \cdot Har(r, m, k), \quad (1.5)$$

де $n = \log_2 N$.

Для ненормованих дискретних функцій Хаара $\tilde{H}(r, m, x)$ спектр функції $S(k)$ визначають із:

$$C(r, m) = 2^{-n+1} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} S(k) \cdot \tilde{Har}(r, m, k), \quad (1.6)$$

а $S(k)$ представляють у вигляді ряду:

$$S(k) = C(0, 0) \cdot \tilde{Har}(0, 0, k) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{2^r} C(r, m) \cdot \tilde{Har}(r, m, k). \quad (1.7)$$

Для переходу від ненормованої функції до нормованої (для якої виконується умова $\|S\|^2 = 1$), необхідно спочатку розрахувати норму

$$\|\dot{S}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt}. \quad (1.8)$$

Домашнє завдання.

1. Записати загальний вираз для безперервних функцій Радемахера.
2. Скласти матрицю для системи N дискретних функцій Радемахера (взяти $N=4$).
3. Побудувати графіки функцій від $rad(0,x)$ до $rad(4,x)$.
4. Записати рекурентне співвідношення для визначення нормованих функцій Хаара (крім $har(0,0,x)$).
5. Побудувати графіки нормованих функцій Хаара від $har(0,0,x)$ до $har(2,4,x)$.
6. Побудувати графіки ненормованих функцій Хаара від $\tilde{har}(0,0,x)$ до $\tilde{har}(2,4,x)$.
7. Розрахувати норму для функції $\tilde{har}(4,\#,x)$, де $\#$ - номер студента у списку.
8. Для періодичного сигналу $u(t)$, заданого у вигляді (рис. 1.5), визначити перші чотири коефіцієнти розкладу:
 - а) в базисі нормованих неперервних функцій Хаара;
 - б) використати ДПХ для ненормованих функцій Хаара;
 - в) побудувати спектри для пунктів а) та б).
 - г) по отриманим коефіцієнтам провести синтез сигналів $u_1(t)$ та $u_2(t)$, представивши усі сигнали на одному графіку.

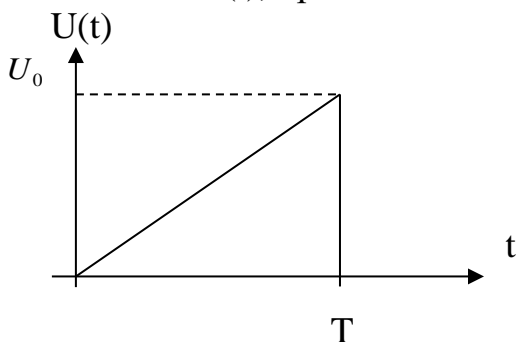


Рис. 1.4. Сигнал $u(t)$ для п.8

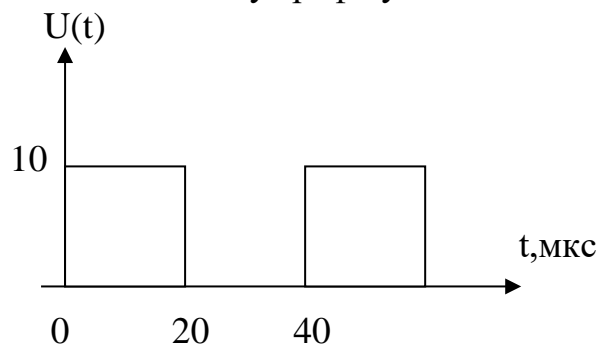


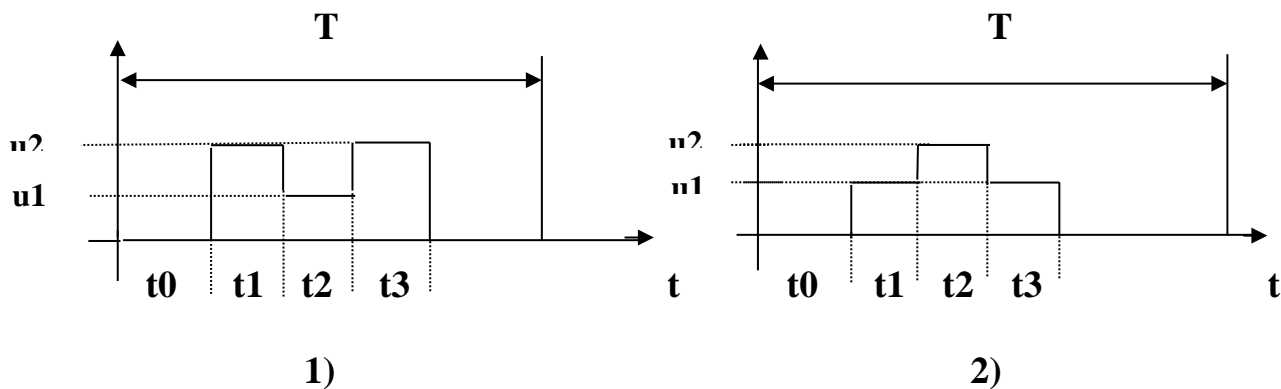
Рис. 1.5. Сигнал $u(t)$ для п.10

Порядок виконання роботи

1. Відповідно до номера варіанта, використовуючи перетворення Хаара, розрахувати спектр заданого сигналу $u(t)$.
 - А. Використовувати нормовані неперервні функції Хаара.
 - Б. Використовувати нормовані дискретні функції Хаара. Використати ДПХ.
2. Використовуючи отримані в п.1. А и Б результати, синтезувати заданий сигнал $u(t)$ і побудувати графіки при різній кількості членів розкладу.
3. Записати висновки по роботі.

Варіанти виконання лабораторної роботи

Табл.1.1



Варіант	Сигнал (табл.1.1)	T, мкс	t0, мкс	T1, мкс	t2, мкс	t3, мкс	u1, В	u2, В
1	1	64	8	16	16	16	1	2
2	2	64	8	16	16	16	1	2
3	1	128	16	16	64	16	1	4
4	2	128	16	16	64	16	1	4
5	1	64	32	8	8	16	2	3
6	2	64	32	8	8	16	2	3
7	1	128	16	64	32	16	3	5
8	2	128	16	64	32	16	3	5
9	1	64	8	16	32	8	1	3
10	2	64	8	16	32	8	1	3
11	1	128	0	16	32	32	2	5
12	2	128	0	16	32	32	2	5

де u_1, u_2 – рівні сигналів, а t_0, t_1, t_2, t_3 – часові інтервали.

Контрольні запитання

1. Ортогональні й ортонормовані базиси функцій. Привести приклади таких функцій. Вміти визначити інтервал ортогональності і норму для різних систем базисних функцій.
2. Безперервні і дискретні функції. Визначення частоти дискретизації.
3. Побудувати матриці для дискретних функцій Радемахера і Хаара різного порядку.
4. Области застосування несинусоїдальних базисних функцій.
5. Як визначити коефіцієнти розкладу в ряд Хаара?
6. Записати співвідношення для визначення $rad(m,t)$ і $har(r,m,t)$, побудувати графіки цих функцій (для $N = 4$, $N = 8$).
7. Перетворення Фур'є.
8. У чому полягає сутність ДПФ?
9. У чому полягає сутність ШПФ?
10. Перетворення Хаара.
11. Дискретне перетворення Хаара.
12. Побудувати $\prod_{i=1}^3 rad(i,\theta)rad(i+1,\theta)$.
13. Побудувати графіки функцій $har(n,m,\theta)$.
14. Визначити амплітуду функції Хаара $har(n,m,\theta)$.

Приклади виконання розділів лабораторної роботи

Приклад 1. Перетворення Хаара для неперервних функцій.

Розглянемо сигнал $f(x)$, графік якого представлений рис. 1.6.

$$f(x) := \begin{cases} 4 & \text{if } (x \geq 0) \wedge (x < 0.125) \\ 2 & \text{if } (x \geq 0.125) \wedge (x < 0.5) \\ 1 & \text{if } (x \geq 0.5) \wedge (x < 0.75) \\ 0 & \text{if } (x \geq 0.75) \wedge (x \leq 1) \end{cases}$$

, де $x = \frac{t}{T}$ – нормований час.

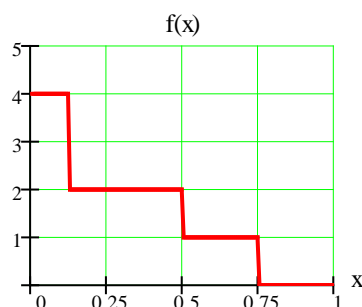


Рис.1.6. Графічне представлення сигналу $f(x)$

Розрахуємо та побудуємо амплітудний і фазовий спектр сигналу $f(x)$, використовуючи нормовані функції Хаара.

Для розрахунку спектра заданого сигналу обмежимося спочатку вісьма першими функціями Хаара. Використовуючи програмне середовище Mathcad, на основі виразу 1.3а, одержимо вісім коефіцієнтів, які і визначають спектр заданого сигналу $f(x)$:

$C(0,0)$	$C(0,1)$	$C(1,1)$	$C(1,2)$	$C(2,1)$	$C(2,2)$	$C(2,3)$	$C(2,4)$
1.5	1	0.354	0.354	0.5	0	0	0

Примітка. При формуванні функцій Хаара, використовуючи Mathcad, необхідно записати умови, що заданим значенням n відповідає певний набір значень m .

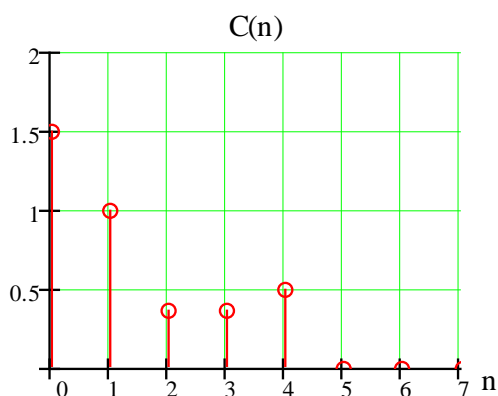


Рис.1.7. Амплітудний спектр сигналу $f(x)$ в базисі функцій Хаара

Оскільки всі коефіцієнти розкладу додатні, то фазовий спектр заданого сигналу буде мати вигляд представлений на рис.1.8. Якщо ж i -ий коефіцієнт амплітудного спектру сигналу від'ємний, то i -та складова фазового спектру буде дорівнювати π .

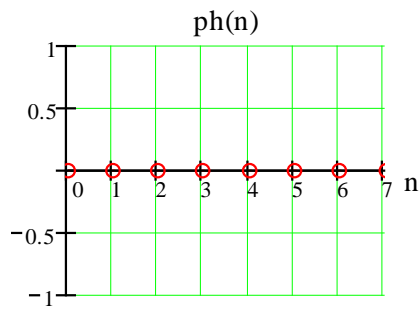


Рис.1.8. Фазовий спектр сигналу $f(x)$ в базисі функцій Хаара

Тепер синтезуємо сигнал $fs(x)$, підставивши отримані коефіцієнти в ряд 1.3.

$$fs(x) = 1.5 \cdot har(0,0,x) + 1 \cdot har(0,1,x) + 0.354 \cdot har(1,1,x) + 0.354 \cdot har(1,2,x) + 0.5har(2,1,x)$$

Графічне представлення заданого сигналу $f(x)$ синтезованого сигналу $fs(x)$ дано на рис.1.9. З рис. видно, обидва сигнали повністю співпадають, тому використання третьої діади, тобто восьми функцій для даного випадку нам достатньо.

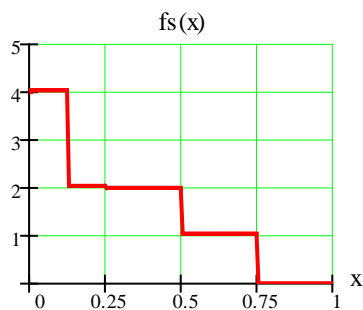


Рис.1.9. Графічне представлення синтезованого сигналу $fs(x)$

Приклад 2. Використовуючи ДПХ визначити спектр сигналу $S(x)$ в базисі:

- нормованих функцій Хаара;
- ненормованих функцій Хаара.

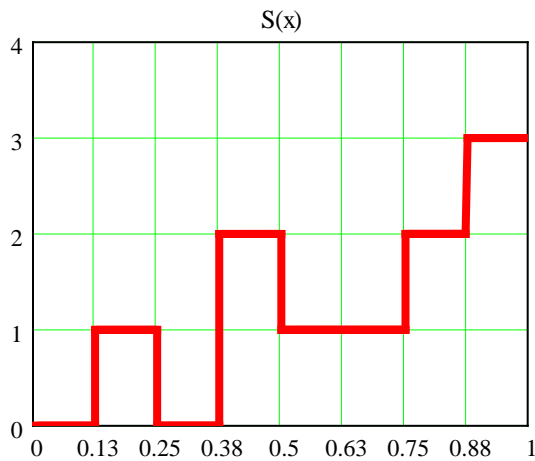


Рис. 1.10. Сигнал $S(x)$

Представимо неперервний сигнал $S(x)$ відліками (табл.)

$S(k)$	0	1	0	2	1	1	2	3
k	0	1	2	3	4	5	6	7

В даному випадку $N = 8$,

$$\begin{aligned} r = 0 & \quad m = 0 \\ r = 1 & \quad m = 1, 2 \\ r = 2 & \quad m = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Матричний опис різних ортогональних перетворень дозволяє найбільш раціонально провести процедуру розрахунку спектрів сигналів. Для цього вихідна дискретна послідовність представляється у вигляді вектора-стовпця $S_k(k)$, а задане перетворення – у вигляді відповідної матриці (в нашому випадку $H(3)$). Множачи цю матрицю на вектор-стовпець отримуємо вектор-стовпець, що є результатом перетворення, тобто спектром заданої послідовності в базисі, що розглядається.

Випадок А. ДПХ для нормованих функції Хаара $Har(r, m, x)$..

Сформуємо вектор-стовпець:

$$S(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Матриця перетворень для нормованих функцій Хаара має вигляд:

$$H(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Розрахунок спектру виконуємо, використовуючи вираз:

$$C = \frac{H \cdot S}{8}$$

Отримуємо вектор-стовпець для C_n :

$$C_n = \begin{pmatrix} 1.25 \\ -0.5 \\ -0.177 \\ -0.53 \\ -0.25 \\ -0.5 \\ 0 \\ -0.25 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_0 = 1.25 & C_1 = -0.5 & C_2 = -0.177 \\ C_3 = -0.53 & C_4 = -0.25 & C_5 = -0.5 \\ C_6 = 0 & C_7 = -0.25 \end{matrix}$$

Перевизначимо коефіцієнти C_n у відповідності до позначень, що використовуються для функцій Хаара $Har(r, m, x)$.

$$\begin{matrix} C_{00} = C_0 & C_{01} = C_1 & C_{11} = C_2 & C_{12} = C_3 \\ C_{21} = C_4 & C_{22} = C_5 & C_{23} = C_6 & C_{24} = C_7 \end{matrix}$$

Для перевірки отриманих результатів у відповідності з матричною формою запису виразу, визначимо відліки вхідного сигналу.

$$\begin{aligned} S0 &= C \cdot H^{<0>} & S1 &= C \cdot H^{<1>} & S2 &= C \cdot H^{<2>} & S3 &= C \cdot H^{<3>} \\ S4 &= C \cdot H^{<4>} & S5 &= C \cdot H^{<5>} & S6 &= C \cdot H^{<6>} & S7 &= C \cdot H^{<7>} \end{aligned}$$

Розрахункові дані для $S(k) \equiv SK$:

$$\begin{aligned} S0 &= 0 & S1 &= 1 & S2 &= 0 & S3 &= 2 \\ S4 &= 1 & S5 &= 1 & S6 &= 2 & S7 &= 3 \end{aligned}$$

Видно, що значення SK повністю співпадають з S(k) – (1.9).

Випадок Б. ДПХ для ненормованих функцій Хаара $\tilde{H}_{ar}(r, m, x)$.

Використовуємо сигнал S(x), що розглядався у першому випадку. Вектор-стовпець має той самий вигляд:

$$S(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Матриця перетворень для ненормованих функцій Хаара має вигляд:

$$\tilde{H}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Розрахунок спектру в даному випадку проводиться поетапно. Спочатку визначаємо значення $C_n = H \cdot S$:

$$C_n = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_0 = 10 & C_1 = -4 & C_2 = -1 \\ C_3 = -3 & C_4 = -1 & C_5 = -2 \\ C_6 = 0 & C_7 = -1 \end{matrix}$$

А потім згідно з (1.6) визначаємо C_{rm} :

$$\begin{matrix} C_{00} = C_0/8 & C_{01} = C_1/8 & C_{11} = C_2/4 & C_{12} = C_3/4 \\ C_{21} = C_4/2 & C_{22} = C_5/2 & C_{23} = C_6/2 & C_{24} = C_7/2 \end{matrix}$$

Перевірку отриманих результатів проводимо, використовуючи вираз (1.7), вводячи додатковий вектор-стовпець [C1], сформований із коефіцієнтів $C_{rm} = \text{CRM}$.

$$C1 = \begin{pmatrix} C_{00} \\ C_{01} \\ C_{11} \\ C_{12} \\ C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{24} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} S0 = C1 \cdot H^{<0>} & S1 = C1 \cdot H^{<1>} & S2 = C1 \cdot H^{<2>} & S3 = C1 \cdot H^{<3>} \\ S4 = C1 \cdot H^{<4>} & S5 = C1 \cdot H^{<5>} & S6 = C1 \cdot H^{<6>} & S7 = C1 \cdot H^{<7>} \end{matrix}$$

Розрахункові дані для $S(k) \equiv SK$ співпадають з заданими:

$$\begin{matrix} S0 = 0 & S1 = 1 & S2 = 0 & S3 = 2 \\ S4 = 1 & S5 = 1 & S6 = 2 & S7 = 3 \end{matrix}$$

Приклад 3. Випадок А. Обробка сигналу з шумом.

Для сигналу, який був розглянутий у прикладі 2 (рис.1.10), запишемо модель $S(x)$:

$$t = 0, 0.001 \dots 1$$

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x < 0.125 \\ 1 & \text{if } 0.125 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{if } 0.25 \leq x < 0.375 \\ 2 & \text{if } 0.375 \leq x < 0.5 \\ 1 & \text{if } 0.5 \leq x < 0.625 \\ 1 & \text{if } 0.625 \leq x < 0.75 \\ 2 & \text{if } 0.75 \leq x < 0.875 \\ 3 & \text{if } 0.875 \leq x < 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

Вектор-стовпець відліків сформуємо с дискретом 0.125.

$$S0 = \begin{pmatrix} S(\frac{1}{16}) \\ S(\frac{3}{16}) \\ S(\frac{5}{16}) \\ S(\frac{7}{16}) \\ S(\frac{9}{16}) \\ S(\frac{11}{16}) \\ S(\frac{13}{16}) \\ S(\frac{15}{16}) \end{pmatrix} \quad S0^T = (0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3) \quad (1.12)$$

Записуємо матрицю H(3)

$$H(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Записуємо вираз для розрахунку коефіцієнтів C_{rm} :

$$C = \frac{H \cdot S0}{8} \quad C^T = (1.25 \ -0.5 \ -0.177 \ -0.53 \ -0.25 \ -0.5 \ 0 \ -0.25)$$

Бачимо, що значення C_{rm} співпадають зі значеннями C_{rm} , отриманими раніше.

Запишемо модель $S1(x) = S(x) + \text{rnd}(0.5)$, що відображає суміш заданого сигналу і шуму (рис. 1.11)

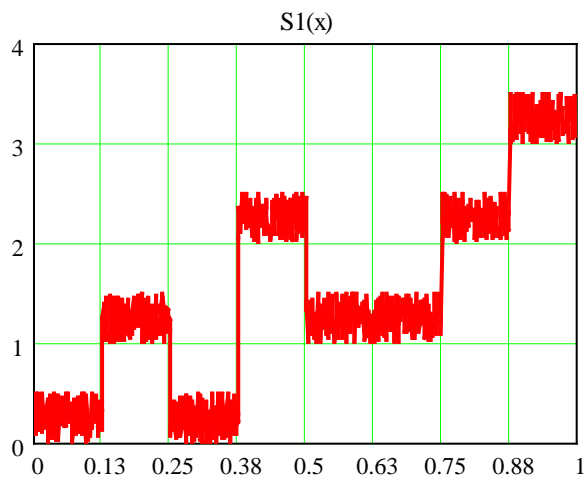


Рис.1.11. Суміш заданого сигналу і шуму

Сформуємо вектор відліків для суміші сигналу і шуму.

$$S1 = \begin{pmatrix} S(\frac{1}{16}) \\ S(\frac{3}{16}) \\ S(\frac{5}{16}) \\ S(\frac{7}{16}) \\ S(\frac{9}{16}) \\ S(\frac{11}{16}) \\ S(\frac{13}{16}) \\ S(\frac{15}{16}) \end{pmatrix} \quad S1^T = (0.025 \quad 1.058 \quad 0.37 \quad 2.002 \quad 1.478 \quad 1.375 \quad 2.339 \quad 3.331)$$

Визначимо значення коефіцієнтів C_m

$$C1 = \frac{H \cdot S1}{8} \quad C1^T = (1.497 \quad -0.634 \quad -0.228 \quad -0.498 \quad -0.258 \quad -0.408 \quad 0.026 \quad -0.248)$$

Використовуючи зворотнє перетворення, отримаємо нові значення для відліків O_k і сформуємо вектор-стовпець $[O]$.

$$\begin{aligned} O0 &= C1 \cdot H^{<0>} & O1 &= C1 \cdot H^{<1>} & O2 &= C1 \cdot H^{<2>} & O3 &= C1 \cdot H^{<3>} \\ O4 &= C1 \cdot H^{<4>} & O5 &= C1 \cdot H^{<5>} & O6 &= C1 \cdot H^{<6>} & O7 &= C1 \cdot H^{<7>} \end{aligned}$$

$$O1 = \begin{pmatrix} O_{00} \\ O_{01} \\ O_{11} \\ O_{12} \\ O_{21} \\ O_{22} \\ O_{23} \\ O_{24} \end{pmatrix} \quad O^T = (0.025 \quad 1.058 \quad 0.37 \quad 2.002 \quad 1.478 \quad 1.375 \quad 2.339 \quad 3.331)$$

Перейдемо від дискретних значень до неперервного сигналу, який представлений на рис.1.12.

$$S_2(x) = \begin{cases} O0 & \text{if } 0 \leq x < 0.125 \\ O1 & \text{if } 0.125 \leq x < 0.25 \\ O2 & \text{if } 0.25 \leq x < 0.375 \\ O3 & \text{if } 0.375 \leq x < 0.5 \\ O4 & \text{if } 0.5 \leq x < 0.625 \\ O5 & \text{if } 0.625 \leq x < 0.75 \\ O6 & \text{if } 0.75 \leq x < 0.875 \\ O7 & \text{if } 0.875 \leq x < 1 \end{cases}$$

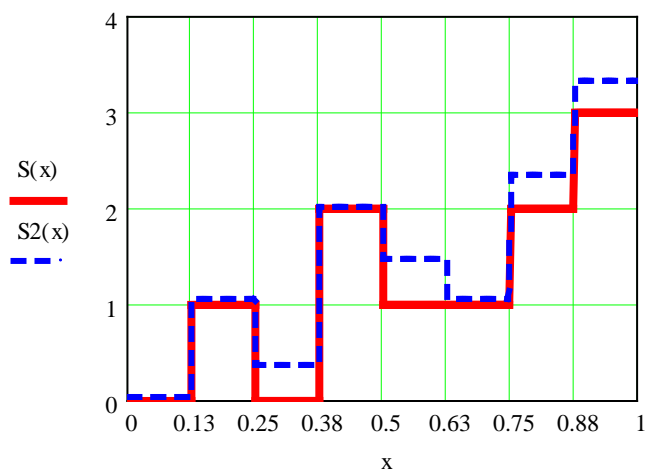


Рис. 1.12. Синтезований сигнал $S_2(x)$ та заданий сигнал $S(x)$

Як видно з рисунка синтезований сигнал $S_2(x)$ на декількох інтервалах добре співпадає з заданим сигналом $S(x)$.

Випадок Б.

Для порівняння розглянемо обробку сигналу с шумом, використовуючи вейвлет-перетворення. Математична модель суміші сигналу з шумом будується аналогічно розглянутому раніше випадку (Приклад 3. Випадок А) Вводимо $S(x)$ – (1.10), $[S0]$ – (1.11), для якого вектор-стовпець відліків $[S0]$ складається з наступних значень

$$S0^T = (0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3) \quad (1.13)$$

Так як Mathcad при кожному зверненні формує свій сигнал с шумом, то для одержання відліків запишемо для суміші сигналу та шуму

$$S1(x) = S(x) + \text{rnd}(0.5). \quad (1.14)$$

Результати розрахунку по виразу (1.14) представлені на рис. 1.13, а дані вектора значень $S(k)$ беруться з транспонованого вектора-стовпця $[S1]$ (1.15).

$$S1 = \begin{pmatrix} S1(\frac{1}{16}) \\ S1(\frac{3}{16}) \\ S1(\frac{5}{16}) \\ S1(\frac{7}{16}) \\ S1(\frac{9}{16}) \\ S1(\frac{11}{16}) \\ S1(\frac{13}{16}) \\ S1(\frac{15}{16}) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

$$S1^T = (0.01 \ 1.41 \ 0.168 \ 2.063 \ 1.489 \ 1.075 \ 2.366 \ 3.316) \quad (1.16)$$

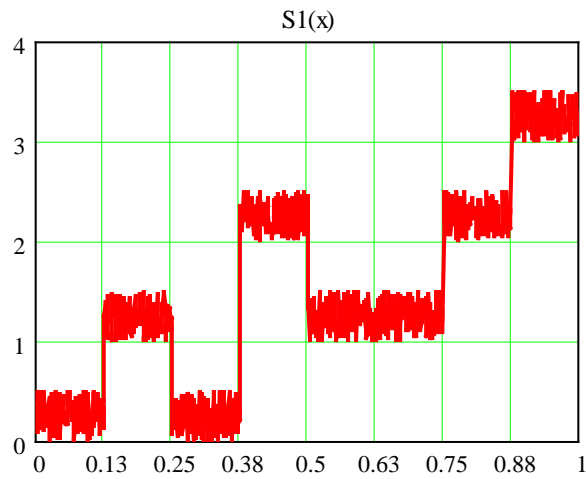


Рис. 1.13. Суміш заданого сигналу і шуму

Беремо вісім відліків с шагом 0.125. Спочатку розглянемо сигнал без шуму і отримаємо вейвлет – спектр Добеши модельного сигналу $S(x)$.

$i = 0, 1 \dots 7$

$$s_i = \begin{cases} S0_0 & \text{if } i = 0 \\ S0_1 & \text{if } i = 1 \\ S0_2 & \text{if } i = 2 \\ S0_3 & \text{if } i = 3 \\ S0_4 & \text{if } i = 4 \\ S0_5 & \text{if } i = 5 \\ S0_6 & \text{if } i = 6 \\ S0_7 & \text{if } i = 7 \end{cases}$$

Пряме wave (s) та зворотнє iwave (w) вейвлет перетворення Добеши.

$$Y = \text{wave}(s) \quad Y^T = (1.634 \quad 3.336 \quad -1.299 \quad -0.933 \quad -1.414 \quad -1.19 \quad -0.095 \quad -0.129)$$

$$W_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \geq 8 \\ Y_i & \text{if } i < 8 \end{cases}$$

$$Z = \text{iwave}(W) \quad Z^T = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3) \quad (1.17)$$

Бачимо, що елементи $[Z]^T$ співпадають з елементами $[S0^T]$ – (1.13).

Проведемо пряме та зворотнє перетворення для суміші сигналу з шумом $S_1(x)$ (1.14).

$$sk_i = \begin{cases} S1_0 & \text{if } i = 0 \\ S1_1 & \text{if } i = 1 \\ S1_2 & \text{if } i = 2 \\ S1_3 & \text{if } i = 3 \\ S1_4 & \text{if } i = 4 \\ S1_5 & \text{if } i = 5 \\ S1_6 & \text{if } i = 6 \\ S1_7 & \text{if } i = 7 \end{cases}$$

$$Y1 = \text{wave}(sk) \quad Y1^T = (2.037 \quad 3.911 \quad -1.228 \quad -0.939 \quad -1.722 \quad -1.173 \quad 0.242 \quad -0.057)$$

$$W_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \geq 8 \\ Y1_i & \text{if } i < 8 \end{cases}$$

$$Z1 = \text{iwave}(W)$$

$$Z1^T = (0.01 \quad 1.41 \quad 0.168 \quad 2.063 \quad 1.489 \quad 1.075 \quad 2.366 \quad 3.316) \quad (1.18)$$

Формуємо неперервний сигнал $S3(x)$ (рис.1.14), використовуючи дискретний сигнал $Z1(k)$ (1.18).

$$S_3(x) = \begin{cases} Z1_0 & \text{if } 0 \leq x < 0.125 \\ Z1_1 & \text{if } 0.125 \leq x < 0.25 \\ Z1_2 & \text{if } 0.25 \leq x < 0.375 \\ Z1_3 & \text{if } 0.375 \leq x < 0.5 \\ Z1_4 & \text{if } 0.5 \leq x < 0.625 \\ Z1_5 & \text{if } 0.625 \leq x < 0.75 \\ Z1_6 & \text{if } 0.75 \leq x < 0.875 \\ Z1_7 & \text{if } 0.875 \leq x < 1 \end{cases}$$

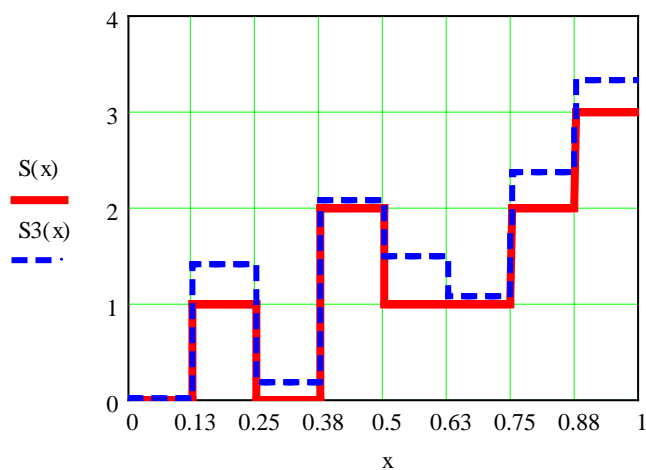


Рис. 1.14. Синтезований сигнал $S3(x)$ та заданий сигнал $S(x)$

Як видно з рис.1.14, очищений від шуму сигнал, як і в випадку використання ДПХ, відрізняється від заданого сигналу $S(x)$.

Випадок В.

Розглянемо випадок очистки сигналу $S1(x)$ від шуму, використовуючи вейвлет-перетворення при збільшенні кількості відліків до 64. Для цього отримаємо оброблений сигнал $Z1_i$, який представлений на рис.1.15.

$$i = 0, 1 \dots 63$$

$$S1(x, i) = S1\left(\frac{x}{64} \cdot i\right), \quad S1_i = S1(1, i)$$

$$sk_i = \begin{cases} S1_i & \text{if } i < 64 \\ 0 & \text{if } i \geq 64 \end{cases}$$

$$Y1 = \text{wave}(sk)$$

$$W_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \geq 64 \\ Y1_i & \text{if } i < 64 \end{cases}$$

$$Y^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4.845 & 9.298 & -3.574 & -1.946 & -3.276 & -2.516 & -0.47 & 0.481 & -2.096 & 0.774 \end{vmatrix}$$

$$Z1 = \text{iwave}(W)$$

$$Z1^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0.036 & 0.431 & 0.444 & 0.076 & 0.287 & 0.088 & 0.417 & 0.429 & 1.491 & 1.354 \end{vmatrix}$$

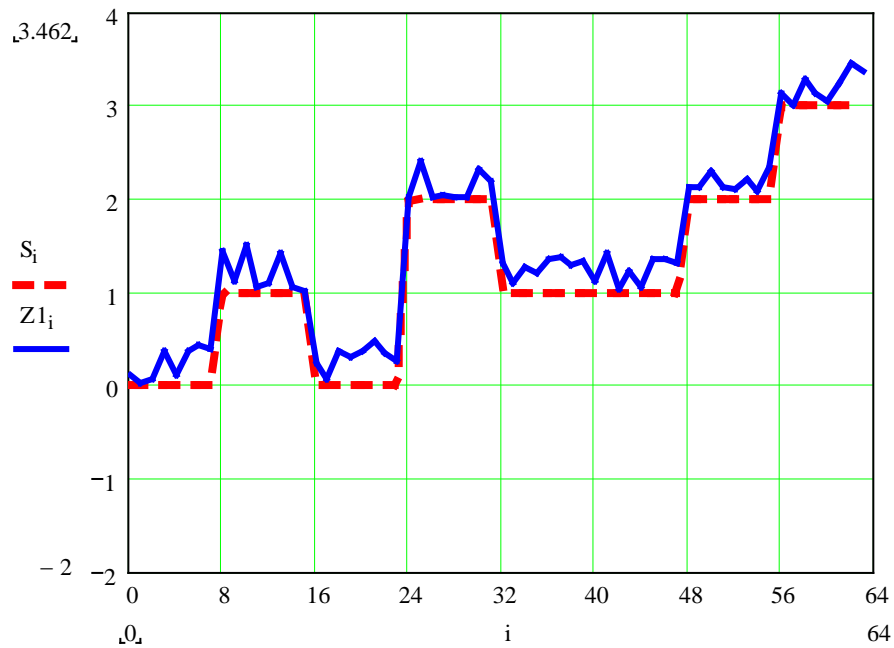


Рис.1.15. Оброблений сигнал $Z1_i$ та заданий сигнал S_i .

Із рисунка видно, що збільшення кількості відліків приводить до зменшення значень нев'язки між заданим сигналом S_i та Z_i , але змінюється форма заданого сингала.

Відмітимо, що дані приклади очистки сигналу від шуму приведені для ілюстрації використання ДПХ. Більш ефективну очистку сигналу від шуму краще проводити, використовуючи можливості пакету Matlab (функція `wden`, або використовуючи стаціонарні вейвлети).

Лабораторна робота №2

Перетворення Уолша

Мета роботи: Вивчити різні види упорядкувань функцій Уолша. Одержання практичних навичок розрахунку спектрів складних сигналів, використовуючи перетворення Уолша.

Теоретичні відомості

Поняття секвентності

Широке використання поняття частоти застосовується до множини синусоїдальних (періодичних) функцій, точки перетинання нульового рівня яких рівномірно розподілені на інтервалі. Цей параметр позначається f і дає можливість розрізняти окремі функції, що належать множинам $\{\cos(2\pi \cdot f \cdot t)\}$ і $\{\sin(2\pi \cdot f \cdot t)\}$. Частота інтерпретується як число повних періодів (або половина числа перетинань нульового рівня) синусоїдальної функції за 1 сек.

Для несинусоїдальних функцій (Радемахера, Хаара, Уолша та інших), Хармут ввів термін частість, для опису узагальненої частоти і застосував його для поділу функцій, точки перетинання нульового рівня яких розподілені нерівномірно на інтервалі і які не обов'язково є періодичними. Узагальнена частість може бути визначена як половина числа перетинань нульового рівня за 1 сек. Для синусоїдальних функцій поняття частоти збігається з поняттям частоти.

Частість неперіодичних функцій дорівнює половині числа перетинів нульового рівня за 1 сек на інтервалі визначення функції. Також використовується термін секвента, що має те ж саме визначення.

Розглянемо неперервні функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$ (рис.2.1), визначені на інтервалі $[0; 1)$. Кожна функція має чотири перетинання нульового рівня на інтервалі, відповідно, частість кожної з цих функцій дорівнює двом.

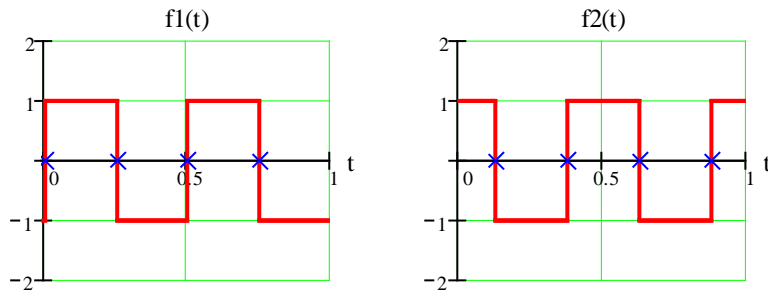


Рис. 2.1. Визначення частоти неперервних функцій

Наведене вище визначення частоти можна з невеликими змінами застосувати до відповідної дискретної функції $f_d(t)$, що отримана із $f(t)$ за допомогою рівномірної поелементної дискретизації, коли кількість дискретів відповідає кількості елементарних імпульсів. Якщо число змін знаку за 1 сек функції $f(t)$ дорівнює η , то частість $f_d(t)$ визначається як $\frac{\eta}{2}$ при парному або $\frac{(\eta+1)}{2}$ при непарному η . Розглянемо дискретні функції $f_{1d}(t)$ і $f_{2d}(t)$, отримані в результаті дискретизації функцій, приведених на рис. 2.1, при розміщенні відліків у чотирьох рівновіддалених точках (рис.2.2). Як видно з рис. 2.2. $\eta_1 = 3$ і $\eta_2 = 4$. Відповідно, частотність кожної з функцій $f_{1d}(t)$ і $f_{2d}(t)$, дорівнює двом, як і у випадку $f_1(t)$ і $f_2(t)$.

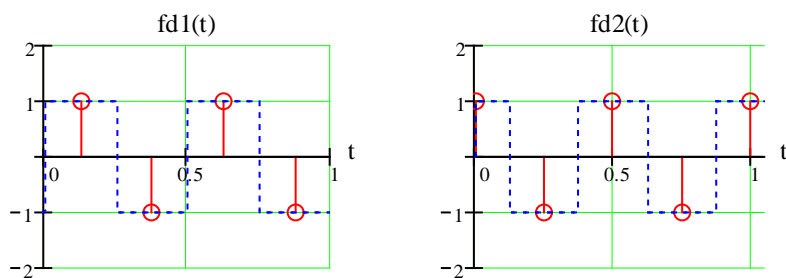


Рис. 2.2. Визначення частотності дискретних функцій

Неперервні функції Уолша та їх представлення

Функції Уолша складають повну систему ортонормованих прямокутних функцій. Існують різні способи упорядкування функцій Уолша – по Уолшу, Адамару, Кулі та ін. Для випадку упорядкування по Уолшу скористаємося способом формування функцій Уолша за допомогою функцій Радемахера.

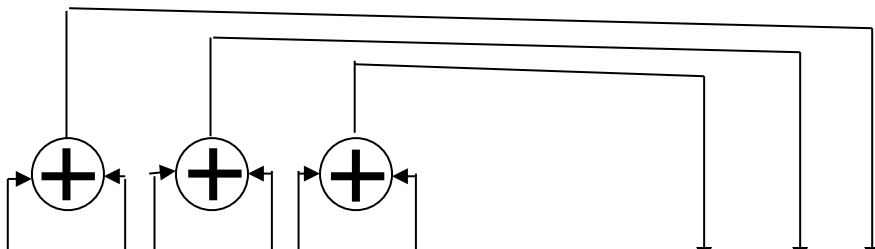
$$wal(w, x) = \prod_{m=1}^n [rad(m, x)]^{w_{n-k+1} \oplus w_{n-k}},$$

де $n = \log_2 N$ – число двійкових розрядів, $x = t/T$ – нормований час,

\oplus – порозрядна сума по модулю 2, w – десяткове представлення номера функції, а w_i – двійкове представлення.

Більш наочно алгоритм одержання функцій Уолша за допомогою функцій Радемахера представлений в табл. 2.1 (для $N = 8$).

Табл. 2.1



w	w_0	w_1	w_2	w_3	$wal(w, \theta) = r_1(\theta) \times r_2(\theta) \times r_3(\theta)$
0	0	0	0	0	$wal(0, \theta) = r_1^0(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^0(\theta)$
1	0	0	0	1	$wal(1, \theta) = r_1^1(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^0(\theta)$
2	0	0	1	0	$wal(2, \theta) = r_1^1(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^0(\theta)$
3	0	0	1	1	$wal(3, \theta) = r_1^0(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^0(\theta)$
4	0	1	0	0	$wal(4, \theta) = r_1^0(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^1(\theta)$
5	0	1	0	1	$wal(5, \theta) = r_1^1(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^1(\theta)$
6	0	1	1	0	$wal(6, \theta) = r_1^1(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^1(\theta)$
7	0	1	1	1	$wal(7, \theta) = r_1^0(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^1(\theta)$

де \oplus – порозрядне додавання по модулю 2, а $r_i^0(\theta) = 1$; $r_i^2(\theta) = r_i(\theta) \dots$

Перші чотири неперервні функції Уолша, які визначені на інтервалах $[0; 1)$ та $[-0.5; 0.5)$, представлені на рис. 2.3 а, б.

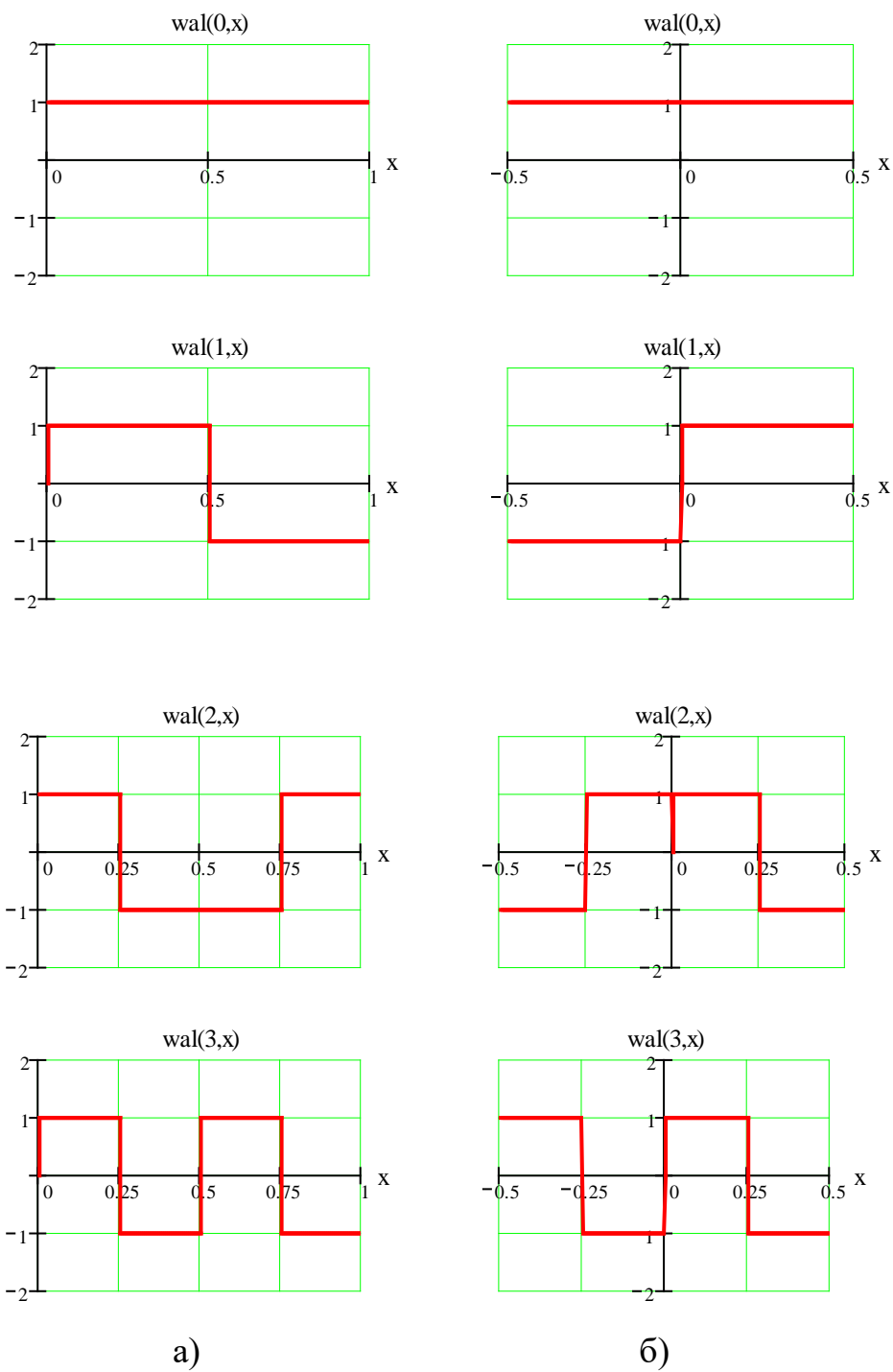


Рис. 2.3. Перші чотири неперервні функції Уолша:
а) на інтервалі $[0; 1)$; б) на інтервалі $[-0.5; 0.5)$;

Дискретні функції Уолша

Дискретні функції Уолша є відліками неперервних функцій Уолша. Кожен відлік вибираємо в середині зв'язаного з ним елемента неперервної функції. Дискретні функції Уолша позначаються як $Wal_r(m, x)$, де індекс r – визначає вид упорядкування функцій Уолша (h – Адамара, p – Пелі, k – Кулі, w – Уолша). Для упорядкування по Уолшу далі індекс опускаємо.

Матриця для перших восьми дискретних функцій Уолша упорядкованих по Уолшу має вигляд:

$$Wal(8) = \begin{vmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{vmatrix} \begin{matrix} Wal(0,x) \\ Wal(1,x) \\ Wal(2,x) \\ Wal(3,x) \\ Wal(4,x) \\ Wal(5,x) \\ Wal(6,x) \\ Wal(7,x) \end{matrix}$$

Різні види упорядкувань функцій Уолша

Упорядкування по Уолшу (по частоті)

Позначимо безліч функцій Уолша через

$$S_w = \{wal_w(i, x), i = 0, 1, \dots, N-1\},$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$; w – упорядкування по Уолшу, i відповідає i -му елементу S_w .

Якщо через s_i позначити частість $wal_w(i, x)$, то s_i визначається, як

$$s_i = \begin{cases} 0, & i = 0; \\ i/2, & i = 2n; \\ (i+1)/2, & i = 2n+1. \end{cases}$$

Використовуючи s_i ми можемо представити записи функцій Уолша і в іншому вигляді – через функції $cal(i, x)$ і $sal(i, x)$. Функції cal – функція

косинусного Уолша та функція sal – функція синусного Уолша, які відповідають $wal_w(i, t)$, описуються таким чином:

$$cal(s_i, x) = wal_w(i, x), i - \text{парне};$$

$$sal(s_i, x) = wal_w(i, x), i - \text{непарне}.$$

Упорядкування по Пелі (діадичне)

$wal_p(i, x) = pal(i, x) \Rightarrow wal(b(i), x)$, де $b(i)$ - перетворення за допомогою коду Грея.

Розглянемо упорядкування по Пелі для $N = 8$. Позначимо розряди i_2 як g_{n-1} , g_n , g_{n+1} , а розряди $b(i)_2$ як h_{n-1} , h_n , h_{n+1} . Тоді перетворення за допомогою коду Грея має такий вигляд:

$$h_{n-1} = g_{n-1}, h_n = g_{n-1} \oplus g_n, h_{n+1} = g_n \oplus g_{n+1}$$

$wal(i, x)$	i_{10}	i_2	$b(i)_2$	$b(i)_{10}$	$pal(i, x)$
$wal(0, x)$	0	000	000	0	$pal(0, x)$
$wal(1, x)$	1	001	001	1	$pal(1, x)$
$wal(2, x)$	2	010	011	3	$pal(3, x)$
$wal(3, x)$	3	011	010	2	$pal(2, x)$
$wal(4, x)$	4	100	110	6	$pal(6, x)$
$wal(5, x)$	5	101	111	7	$pal(7, x)$
$wal(6, x)$	6	110	101	5	$pal(5, x)$
$wal(7, x)$	7	111	100	4	$pal(4, x)$

Матриця системи дискретних функцій Уолша упорядкованих по Пелі має вигляд

$$W_p(8) = \begin{vmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & - & + & - & - & + & - \end{vmatrix} \begin{matrix} Pal(0, x) \\ Pal(1, x) \\ Pal(2, x) \\ Pal(3, x) \\ Pal(4, x) \\ Pal(5, x) \\ Pal(6, x) \\ Pal(7, x) \end{matrix}$$

Упорядкування по Адамару (природне)

Упорядкування по Адамару є найбільш використовуваним в телекомунікаційній техніці, стільниковому зв'язку, системах передачі інформації, а також використовується при побудові блочних кодів.

Нормовану матрицю Адамара можна побудувати рекурсивно. Положимо $H_1 = 1$, тоді

$$H_N = \begin{bmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2} \end{bmatrix}, \text{ при } H_N > 1.$$

Для $N=2$ маємо

$$H_2 = \begin{bmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Матриця системи дискретних функцій Уолша упорядкованих за Адамаром при $N = 8$, має вигляд

$$H_8 = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Had}(0,x) \\ \text{Had}(1,x) \\ \text{Had}(2,x) \\ \text{Had}(3,x) \\ \text{Had}(4,x) \\ \text{Had}(5,x) \\ \text{Had}(6,x) \\ \text{Had}(7,x) \end{matrix}$$

Властивості функцій Уолша

1. Функції Уолша $wal(i, x)$ приймають тільки два значення $+1$, -1 при $i \geq 1$.

Функція $wal(0, x)$ на інтервалі $x \in [0, 1)$ чи $x \in [-0.5, 0.5)$ дорівнює одиниці.

2. Функції Уолша ортонормовані на інтервалі $x \in [0, 1)$:

$$\int_0^1 wal(k, x) \cdot wal(i, x) dx = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

3. Функції Уолша мають властивість мультипликативності, тобто добуток двох функцій Уолша дає іншу функцію Уолша, причому

$wal(k, x) \cdot wal(i, x) = wal(k \oplus i, x)$, де цілі числа $k, i = 0, 1, 2, \dots$ додаються в двійковій системі числення без переносу одиниці в старший розряд, тобто $0+0 = 0$, $0+1 = 1$, $1+0 = 1$, $1+1 = 0$.

4. Функції Уолша $wal(i, x)$ мають властивість симетрії, яка проявляється в тому, що усі висновки відносно i справедливі також і відносно x .

Наприклад, властивість мультипликативності з урахуванням властивостей симетрії запишеться у вигляді

$$wal(i, x_1) \cdot wal(i, x_2) = wal(i, x_1 \oplus x_2).$$

5. Середнє значення функції Уолша при $i \neq 0$ дорівнює нулю (що свідчить про те, що число нулів і одиниць однаково). Для функції $wal(0, x)$ середнє значення дорівнює одиниці.

6. Оскільки на інтервалі визначення N у систему функцій Уолша входить N ортогональних функцій, то вона є повною. Це означає, що її не можна доповнити на цьому інтервалі ні однією новою функцією, що була б ортогональна одночасно до всіх інших функцій, що входять у систему.

Перетворення Уолша

Будь-яку функцію $f(x)$, що інтегрується на інтервалі $0 \leq x < 1$, можна представити рядом Фур'є по базисній системі функцій Уолша:

$$f(x) = A_0 \cdot wal(0, x) + A_1 \cdot wal(1, x) + A_2 \cdot wal(2, x) + \dots + A_n \cdot wal(n, x) = A_0 \cdot wal(0, x) + \sum_{i=1}^{N/2} [A_{2i} \cdot cal(i, x) + A_{2i-1} \cdot sal(i, x)] \quad (2.1)$$

с коефіцієнтами

$$A_i = \int_0^1 f(x) \cdot wal(i, x) dx, \text{ де } x = \frac{t}{T}. \quad (2.2)$$

Дискретне перетворення Уолша (ДПУ)

ДПУ широко використовується для цифрових методів спектрального аналізу та обробки сигналів.

У деяких випадках, в зв'язку з відсутністю комплексних значень ДПУ, при аналізі доцільно використовувати ДПФ.

Коефіцієнти розкладу функції $S(k)$ визначаються як:

$$C_k = 2^{-n} \sum_{i=0}^{2^n-1} S(k) \cdot Wal(i, x), \quad (2.3)$$

де n – номер діади $N = 2^n$.

Функція $S(k)$ може бути представлена у вигляді ряду:

$$S(k) = \sum_{i=0}^{2^n-1} C_k \cdot Wal(i, k). \quad (2.4)$$

Швидке перетворення Уолша (ШПУ)

Алгоритми ШПУ будуються по аналогії з ШПФ. Пояснимо принципи побудови алгоритму ШПУ на прикладі простого чотирьох дискретного сигналу ($N = 2^n = 4$), представленого сукупністю чотирьох відліків $S(k)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Сформуємо вектор-стовпчик $[S(k)]$:

$$[S(k)]^T = [S(0), S(1), S(2), S(3)]$$

Тоді матриця W_3 має вигляд:

$$[W_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ а } C_k = |W_3| \cdot |S(k)|.$$

Розгорнуті вирази для спектральних коефіцієнтів $|C_k|$ набувають наступного вигляду:

$$C_0 = \frac{(S(0) + S(1)) + (S(2) + S(3))}{4} = \frac{A + B}{4};$$

$$C_1 = \frac{(S(0) + S(1)) - (S(2) + S(3))}{4} = \frac{A - B}{4};$$

$$C_2 = \frac{(S(0) - S(1)) - (S(2) - S(3))}{4} = \frac{C - D}{4};$$

$$C_3 = \frac{(S(0) + S(1)) - (S(2) + S(3))}{4} = \frac{C + D}{4},$$

де $A = S(0) + S(1)$, $B = S(2) + S(3)$, $C = S(0) - S(1)$, $D = S(2) - S(3)$.

Прискорення розрахунків забезпечується зменшенням числа операцій додавання (складові, що повторюються, не практично вираховувати для кожного k заново). Аналогічні результати отримуються при використанні різних упорядкувань функцій Уолша. Зменшення числа операцій досягає N/n .

Порівнюючи з ШПФ тут виключаються операції множення.

Домашнє завдання.

1. Побудувати наступні неперервні функції: $wal(8,x)$, $wal(11,x)$, $wal(14,x)$;
2. Побудувати наступні дискретні функції: $Wal(6,x)$, $Wal(10,x)$, $Wal(13,x)$;
3. Упорядкувати по Уолшу, Пелі й Адамару: перші 16 функцій Уолша;
4. Розкласти задану функцію Хаара у базисі функцій Уолша (табл. 2.2). Обґрунтувати вибрану кількість функцій Уолша для вашого випадку. Записати ряд с отриманими коефіцієнтами і провести синтез сигналу. Побудувати графік синтезованого сигналу.
5. Розрахувати норму для функцій Уолша, заданих у п.1.
6. Обчислити перші вісім коефіцієнтів розкладу по базисним функціям Уолша для періодичного сигналу $u(t)$ (рис. 2.4). Провести синтез сигналу і побудувати його графік.

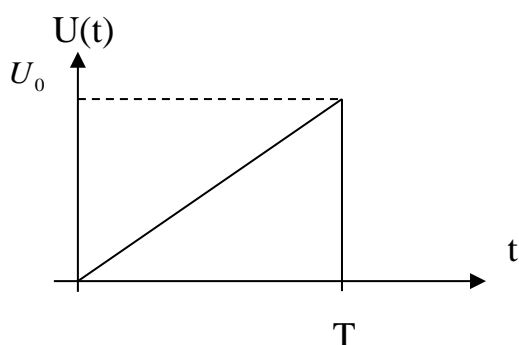


Рис. 2.4. Сигнал $u(t)$ для п.6

Табл.2.2

$har(r,m,x)$

№ вар-ту	r	m	№ вар-ту	r	m
1	1	1	14	3	8
2	1	2	15	4	1
3	2	1	16	4	2
4	2	2	17	4	3
5	2	3	18	4	4
6	2	4	19	4	5
7	3	1	20	4	6
8	3	2	21	4	7
9	3	3	22	4	8
10	3	4	23	4	9
11	3	5	24	4	10
12	3	6	25	4	11
13	3	7			

Порядок виконання роботи

1. Відповідно до номера варіанта, використовуючи перетворення Уолша, розрахувати амплітудний і фазовий спектр заданих сигналів (табл. 2.3).
2. Синтезувати задані сигнали і побудувати графіки при різному числі членів розкладу.
3. Записати висновки по роботі.

Варіанти виконання лабораторної роботи

Табл.2.3

№ вар-та	Синусоїдальна функція	Послідовність імпульсів
1	$\sin(4\pi\theta)$	Прямокутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{8}$
2	$\cos(4\pi\theta)$	Прямокутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{16}$
3	$-\sin(2\pi\theta)$	Прямокутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{8}$
4	$\cos(2\pi\theta + \pi)$	Прямокутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{16}$
5	$\sin(2\pi\theta + \pi/2)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{2}$
6	$\cos(4\pi\theta - \pi)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{4}$
7	$-\sin(4\pi\theta)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{8}$
8	$\sin(\pi\theta)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{4}$
9	$\cos(\pi\theta)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{8}$
10	$-\cos(4\pi\theta)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{16}$
11	$\cos(2\pi\theta - \pi/2)$	Прямокутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{2}$, зміщення на $\tau_i/2$
12	$-\cos(2\pi\theta)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{2}$, зміщення на $\tau_i/2$
13	$\cos(2\pi\theta + \pi/6)$	Прямокутні $\tau_i/T_0 = \frac{1}{8}$, зміщення на $\tau_i/2$
14	$\sin(2\pi\theta + \pi/4)$	Прямокутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{16}$, зміщення на $\tau_i/2$
15	$\cos(2\pi\theta - \pi/3)$	Прямокутні $\tau_i/T_0 = \frac{1}{4}$, зміщення на $\tau_i/2$

№ вар-та	Синусоїдальна функція	Послідовність імпульсів
16	$\cos(2\pi\theta + \pi/12)$	Прямокутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{8}$, зміщення на $\tau_i/2$
17	$\sin(2\pi\theta - \pi/6)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{4}$, зміщення на $\tau_i/2$
18	$\cos(2\pi\theta + 2\pi/3)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{8}$, зміщення на $\tau_i/2$
19	$-\sin(2\pi\theta + \pi/8)$	Трикутні $\tau_i/T_0 = \frac{1}{16}$, зміщення на $\tau_i/2$
20	$\cos(2\pi\theta + \pi/5)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{4}$, зміщення на $\tau_i/2$
21	$\sin(2\pi\theta - \pi/3)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{8}$, зміщення на $\tau_i/2$
22	$-\cos(2\pi\theta + \pi/8)$	Прямокутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{5}$
23	$\cos(2\pi\theta + 5\pi/6)$	Прямокутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{10}$
24	$\sin(2\pi\theta - 3\pi/4)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{5}$
25	$\sin(2\pi\theta + \pi/7)$	Трикутні, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{10}$

Контрольні запитання

1. Яку систему функцій складає система функцій Уолша?
2. Яке упорядкування функцій Уолша забезпечує спадаючий спектр?
3. Як визначити секвентність функції Уолша?
4. При якому упорядкуванні функцій Уолша секвентність росте з ростом номера функцій Уолша.
5. Як одержують дискретні функції Уолша.
6. Перелічіть основні властивості функцій Уолша.
7. Пряме і зворотне перетворення функцій Уолша.
8. Дискретне перетворення функцій Уолша.
9. Швидке перетворення функцій Уолша.
10. У якому випадку спектр Уолша періодичної послідовності імпульсів містить скінчене число складових?
11. У якому випадку спектр Уолша функції $\sin(2\pi x + \varphi)$, розглянутої на інтервалі $[0; 1)$, буде складатися тільки з непарних складових?

Приклади виконання розділів лабораторної роботи

Приклад 1. Розрахунок спектра синусоїди у базисі неперервних функцій Уолша

Розрахуємо і побудуємо спектр синусоїди $s(t) = \sin \frac{2\pi t}{T}$ у базисі неперервних функцій Уолша. Для того щоб перейти до безрозмірного часу $x = \frac{t}{T}$ інтервал розкладу T_0 доцільно прирівняти до величині T . Тоді запишемо коливання $s(t)$ у вигляді $s_1(x) = \sin 2\pi x$ (рис.2.5).

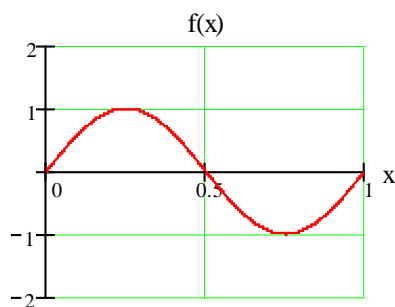


Рис. 2.5. Графік функції $s_1(x) = \sin 2\pi x$

При розкладі заданої функції обмежимося 16-ю неперервними функціями Уолша. Оскільки задана функція $s_1(x)$ непарна відносно точки $x = \frac{1}{2}$, усі коефіцієнти при парних функціях Уолша у ряді (2.1), тобто при $wal(j,x)$, дорівнюють нулю.

Ті з восьми функцій $wal(i,x)$, що залишилися, і які співпадають з функціями Радемахера, (мають періодичність всередині інтервалу $[0;1)$, кратну періоду функції $s_1(x)$), також приводять до нульових коефіцієнтів. До таких функцій відносяться $wal(3,x)$, $wal(7,x)$ і $wal(15,x)$. Нарешті, функція $wal(11,x)$, непарна не тільки щодо точки $x = \frac{1}{2}$, але також щодо точок $x = \frac{1}{4}$ і $x = \frac{3}{4}$ (всередині інтервалів $[0;1/2)$ і $(1/2;1]$), що приводить до нульового коефіцієнта A_{11} через парність $s_1(x)$ у зазначених інтервалах.

Отже, лише чотири коефіцієнти з 16 не дорівнюють нулю: A_1 , A_5 , A_9 и A_{13} .

Визначимо ці коефіцієнти за виразом 2.2.

$$A_1 = 2 \int_0^{1/2} \sin 2\pi x dx = 2/\pi = 0,636,$$

$$A_5 = 4 \int_0^{2/16} \sin 2\pi x dx - 2 \int_{2/16}^{6/16} \sin 2\pi x dx = \frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \cos \frac{\pi}{4} \right) = -0,265,$$

$$A_9 = 4 \int_0^{1/16} \sin 2\pi x dx - 4 \int_{1/16}^{3/16} \sin 2\pi x dx + 2 \int_{3/16}^{5/16} \sin 2\pi x dx = -0,052,$$

$$A_{13} = 4 \int_0^{1/16} \sin 2\pi x dx - 4 \int_{1/16}^{2/16} \sin 2\pi x dx + 4 \int_{2/16}^{3/16} \sin 2\pi x dx - 2 \int_{3/16}^{5/16} \sin 2\pi x dx = -0,128.$$

Отриманий спектр представлений на рис.2.6.

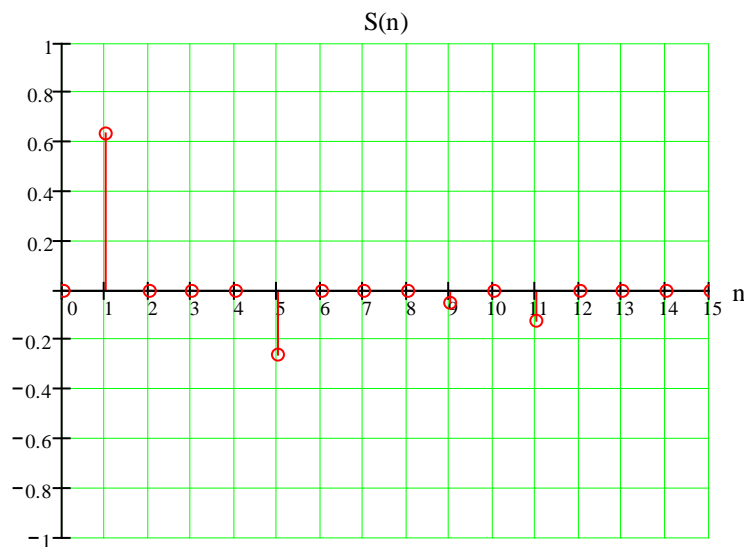


Рис.2.6. Спектр функції $\sin 2\pi x$ у базисі функцій Уолша

Тепер синтезуємо сигнал $S(t)$, використовуючи ряд 2.1. Відмітимо, що номер максимальної амплітуди спектру відповідає секвентності сигналу $S(t)$. Вихідний і синтезований сигнали представлені на рис. 2.7.

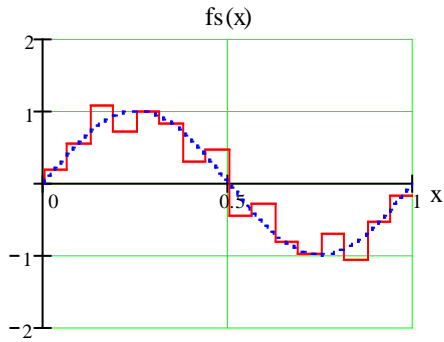


Рис. 2.7. Заданий (пунктирна лінія) і синтезований (суцільна лінія) сигнал $S(t)$

Приклад 2. Розрахунок спектра косинусоїди з довільною початковою фазою у базисі неперервних функцій Уолша

Розрахуємо і побудуємо спектр гармонічного коливання $s_1(t) = \cos(\omega t + \theta_0)$ у базисі функцій Уолша. Як і в попередньому прикладі, розглянемо один цикл гармонічного коливання з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Переходячи до безрозмірного

часу $x = \frac{t}{T}$, записуємо коливання $s_1(t)$ у формі

$$s_1(x) = \cos(2\pi x + \theta_0) = \cos \theta_0 \cdot \cos 2\pi x - \sin \theta_0 \cdot \sin 2\pi x = A \cos 2\pi x - B \sin 2\pi x.$$

Спектр Уолша функції $\sin 2\pi x$ визначений вище у прикладі 1. Визначення спектра функції $\cos 2\pi x$ на інтервалі $[0;1)$ проводимо аналогічно. Так як функція $s_1(t)$ парна, то функції $sal(j, x)$ замінимо функціями $cal(j, x)$. Легко перевірити, що при упорядкуванні по Уолшу нові коефіцієнти в ряді (2.1) будуть A_2, A_6, A_{10}, A_{14} замість A_1, A_5, A_9 і A_{13} . При цьому значення коефіцієнтів залишаються тими, які ми одержали раніше.

Таким чином, ряд (2.1) для розглянутого коливання можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} s_1(x) = \cos \theta_0 \cdot \cos 2\pi x - \sin \theta_0 \cdot \sin 2\pi x = \cos \theta_0 [A_2 \cdot wal(2, x) + A_6 \cdot wal(6, x) + \\ + A_{10} \cdot wal(10, x) + A_{14} \cdot wal(14, x)] - \sin \theta_0 [A_1 \cdot wal(1, x) + A_5 \cdot wal(5, x) + \\ + A_9 \cdot wal(9, x) + A_{13} \cdot wal(13, x)]. \end{aligned}$$

Отже, при зміщенні гармонічного коливання по фазі спектр Уолша містить парні і непарні функції $sal(j, x)$ і $cal(j, x)$.

Для початкової фази рівної $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ спектр функції $f(x)$ (рис. 2.8) у базисі функцій Уолша буде мати вигляд представлений на рис. 2.9. Синтезований сигнал представлений на рис. 2.10.

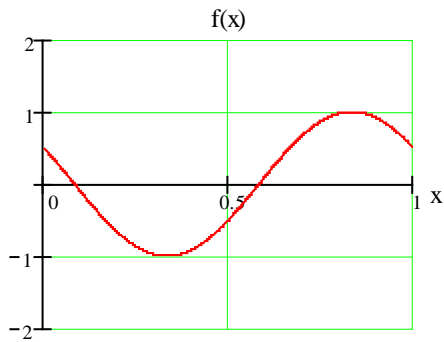


Рис. 2.8. Графік функції $\cos(2\pi x + \theta_0)$

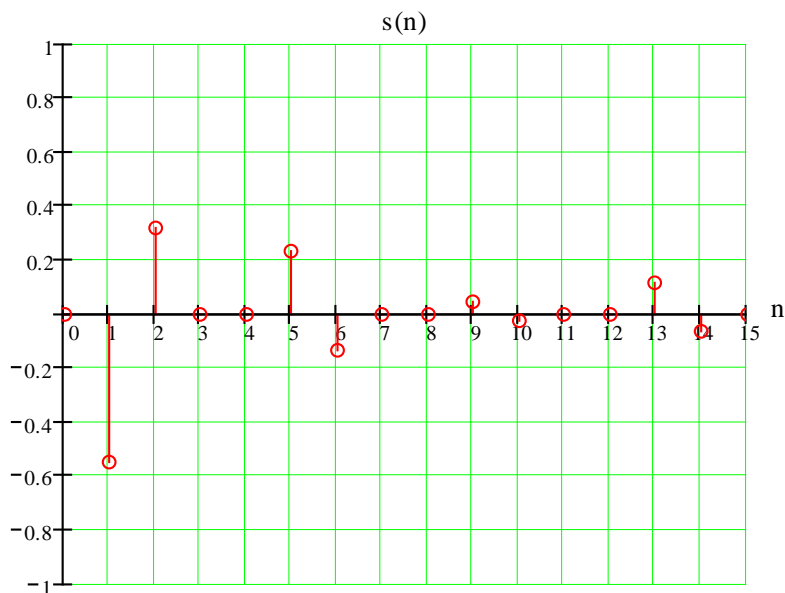


Рис. 2.9. Спектр функції $\cos(2\pi x + \theta_0)$ у базисі функцій Уолша

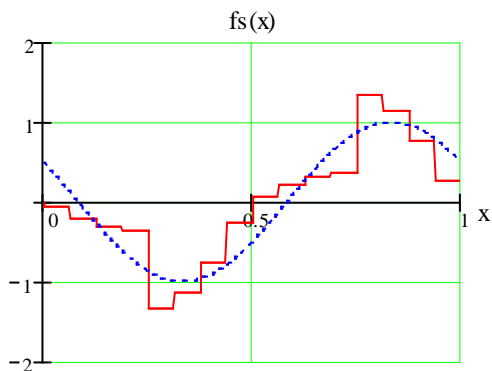


Рис. 2.10. Заданий (пунктирна лінія) і синтезований (суцільна лінія) сигнал

Приклад 3. Розрахунок спектра прямокутного імпульсу у базисі неперервних функцій Уолша

Розрахуємо і побудуємо спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів (рис. 2.11) у базисі функцій Уолша. Визначимо коливання $s_2(x)$ на інтервалі $[0, T_0)$ наступним чином $s_2(t) = 1, 0 \leq t < \tau_i$, і відповідно

$$s_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \tau_i / T_0, \\ 0, & x \geq \tau_i / T_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

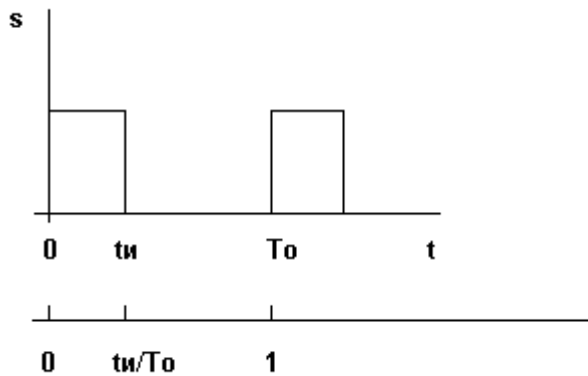


Рис. 2.11. Один цикл періодичної імпульсної послідовності при $\tau_i / T_0 = \frac{1}{2}$.

Структура спектра Уолша заданого коливання залежить від співвідношення між τ_i і T_0 . Часова база T_0 є додатковим параметром функцій Уолша, яку можна вибрати довільно. Дійсно, при $\tau_i / T_0 = 1$ спектр містить лише одну функцію $wal(0, x)$ з коефіцієнтом $A_i = 1$. При $\tau_i / T_0 = \frac{1}{2}$ коливання (2.11) цілком визначається двома функціями $wal(0, x)$ і $wal(1, x)$ з коефіцієнтами $A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$.

Далі, при $\tau_i / T_0 = \frac{1}{4}$ використання формули

$$A(w) = \int_0^1 s(x) wal(w, x) dx = \int_0^{1/4} wal(w, x) dx$$

дає наступні коефіцієнти: $A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1}{4}$.

Знайдені спектри представлені на рис.2.12. Цей результат легко узагальнюється для послідовності прямокутних імпульсів з відношенням $\tau_i/T_0 = \frac{1}{2^k}$, де k – ціле додатне число. Очевидно, що спектр Уолша такого коливання складається з 2^k компонентів з однаковими амплітудами, рівними $\frac{1}{2^k}$. Дуже важливо, що цей спектр містить скінчене число складових; розклад того ж коливання (2.11) по гармонічних функціях дає нескінчену кількість складових.

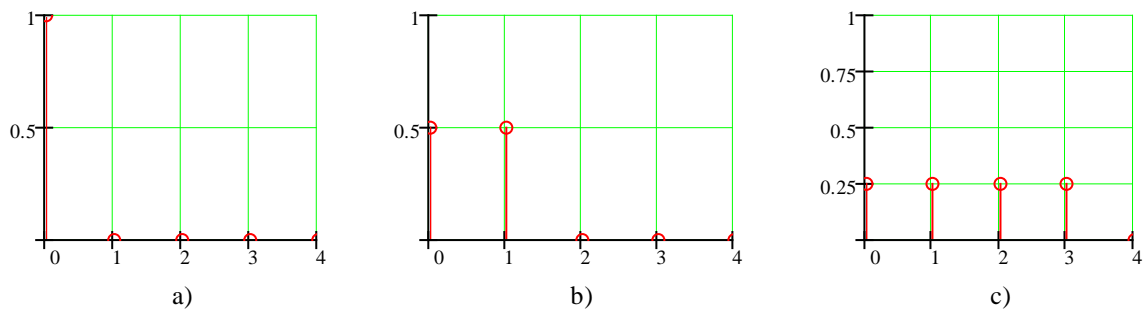


Рис. 2.12. Спектри послідовності прямокутних імпульсів у базисі функцій Уолша:

а) при $\tau_i/T_0 = 1$; б) при $\tau_i/T_0 = \frac{1}{2}$; в) при $\tau_i/T_0 = \frac{1}{4}$; $N = 16$

Розглянемо тепер випадок, коли $\tau_i/T_0 \neq \frac{1}{2^k}$, наприклад, $\tau_i/T_0 = \frac{1}{3}$.

Обмежуючись першими 16-ю функціями Уолша (в упорядкуванні Уолша) і

опускаючи проміжні викладки, одержуємо $A_0 = A_1 = \frac{1}{3}$, $-A_4 = -A_5 = A_6 = A_7 = \frac{1}{12}$,

$A_8 = A_9 = -A_{10} = -A_{11} = -A_{13} = A_{14} = A_{15} = \frac{1}{24}$.

Знайдений спектр представлений на рис.2.13. Відмітимо, що при переході до упорядкування по Пелі структура спектра зберігається (по модулях), але дає спадаючий спектр амплітуд.

Отже, при $\tau_i/T_0 \neq \frac{1}{2^k}$ спектр Уолша періодичної послідовності прямокутних імпульсів містить нескінченну послідовність складових. Сума перших 16 функцій, використовуючи вираз 2.1, дає імпульс, показаний на рис. 2.13.

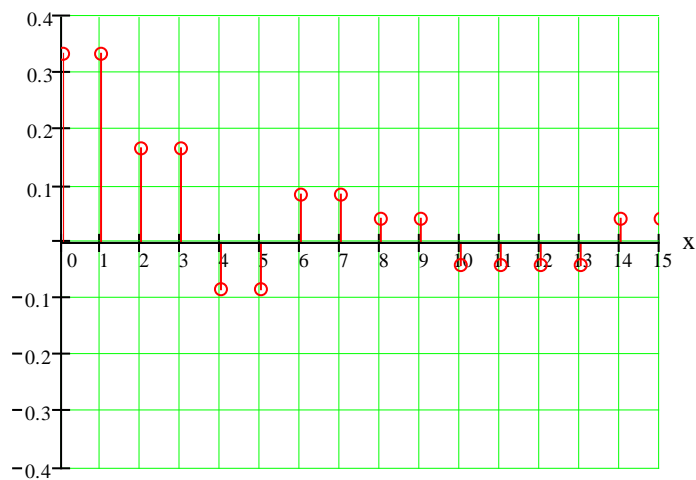


Рис.2.13. Спектр послідовності прямокутних імпульсів у базисі функцій Уолша при $\tau_i/T_0 = \frac{1}{3}$

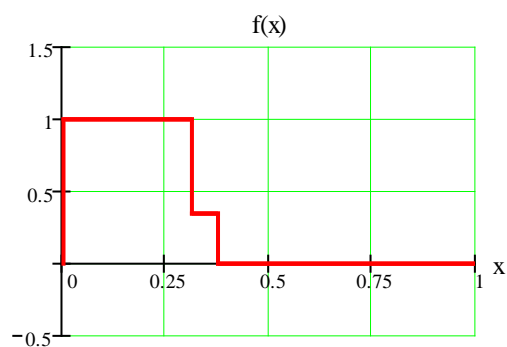


Рис.2.14. Апроксимація послідовності прямокутних імпульсів 16-ю функціями Уолша при $\tau_i/T_0 = \frac{1}{3}$

Приклад 4. Вплив зсуву імпульсної періодичної послідовності на спектр Уолша

Розглянемо імпульсну послідовність $s_3(x)$ з $\tau_i/T_0 = \frac{1}{4}$, яка зсунута на $\tau_i/2$ відносно аналогічній послідовності $s_2(x)$ (див. попередній приклад). В даному випадку використовуємо функції Уолша (в упорядкуванні Уолша), визначені на інтервалі $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$. Визначимо коефіцієнти перетворення Уолша, як:

$$A(w) = \int_{-1/8}^{1/8} wal(w, x) dx \quad (2.7)$$

Обчисливши (2.7), одержимо наступні значення коефіцієнтів:

$$A_0 = A_2 = A_4 = A_6 = \frac{1}{4}.$$

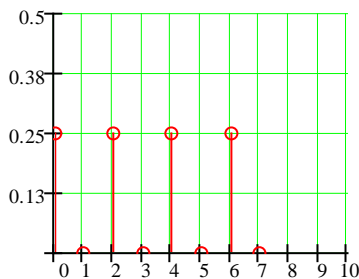


Рис.2.15. Спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів $s_3(x)$ (порівн. з рис. 2.12, с)

Отриманий спектр для $s_3(x)$ (рис.2.15) удвічі ширше спектра функції $s_2(x)$, який представлений на рис.2.12, с. Таким чином, зсув імпульсної послідовності на час $t_i/2$ привів до зміни спектра. Залежність структури спектра амплітуд від зсуву колювання $s(t)$ по осі часу є особливістю аналізу у базисі функцій Уолша. Ця особливість зв'язана з неперіодичністю функцій Уолша на одиничному інтервалі їхнього визначення. Нагадаємо, що при

розкладі по гармонічних функціях зсув сигналу в часі впливає лише на фазовий спектр сигналу.

Приклад 5.

Для сигналу розглянутого у роботі №1, приклад 2, формуємо вектор-стовпець:

$$S(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Для перших восьми дискретних функцій Уолша матриця $H(3)$ має вигляд:

$$H(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Спектр заданого сигналу $S(k)$ у базисі дискретних функцій Уолша визначається наступними коефіцієнтами ряду:

$$C_n = \begin{pmatrix} 1.25 \\ -0.5 \\ 0.25 \\ -0.5 \\ 0.25 \\ 0 \\ -0.25 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_0 = 1.25 & C_1 = -0.5 & C_2 = 0.25 \\ C_3 = -0.5 & C_4 = 0.25 & C_5 = 0 \\ C_6 = -0.25 & C_7 = -0.5 \end{matrix}$$

Використовуючи зворотне перетворення Уолша одержимо значення відліків

$$S(k) \equiv SK.$$

$$S_0 = C \cdot H^{<0>} \quad S_1 = C \cdot H^{<1>} \quad S_2 = C \cdot H^{<2>} \quad S_3 = C \cdot H^{<3>}$$

$$S_4 = C \cdot H^{<4>} \quad S_5 = C \cdot H^{<5>} \quad S_6 = C \cdot H^{<6>} \quad S_7 = C \cdot H^{<7>}$$

$$S_0 = 0 \quad S_1 = 1 \quad S_2 = 0 \quad S_3 = 2$$

$$S_4 = 1 \quad S_5 = 1 \quad S_6 = 2 \quad S_7 = 3$$

Видно, що значення відліків співпадають с заданими (2.8).

Алгоритми одержання спектру сигналу у базисі функцій Уолша упорядкованому по Адамару, Пелі здійснюється аналогічно.

Лабораторна робота №3

Автокореляційна та взаємно кореляційна функції псевдовипадкових та складних сигналів.

Мета роботи: Вивчення автокореляційних та взаємно кореляційних функцій сигналів з великим значенням бази. .

Теоретичні відомості

Автокореляційна функція (АКФ)

АКФ (correlation function, CF) сигналу $s(t)$ зі скінченною енергією є кількісною інтегральною характеристикою сигналу і визначається в результаті інтегрування добутку двох копій сигналу $s(t)$, зміщених відносно один одного на час τ :

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s(t + \tau) dt = \langle s(t), s(t+\tau) \rangle = \|s(t)\| \|s(t+\tau)\| \cos \varphi(\tau). \quad (3.1)$$

Як слідує з виразу (3.1), АКФ є скалярним добутком сигналу і його копії у функціональній залежності від змінної величини зсуву τ . Відповідно, АКФ має фізичну розмірність енергії, а при $\tau=0$ значення АКФ безпосередньо дорівнює енергії сигналу:

$$B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt = E_s.$$

АКФ відноситься до парних функцій, тобто АКФ симетрична відносно $\tau = 0$, у чому переконаємося заміною змінної $t = t - \tau$ у виразі (3.1):

$$B_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t+t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t) s(t) dt = B_s(-t).$$

Максимум АКФ, рівний енергії сигналу при $t=0$, завжди додатний, а модуль АКФ при будь-якому значенні часового зсуву не перевищує енергії сигналу.

АКФ сигналів, обмежених у часі (фінітних сигналів)

На практиці звичайно досліджуються сигнали, задані на визначеному інтервалі (інтервалі кореляції) $[t_1, t_2]$, при цьому обчислення АКФ часто виконується з нормуванням на довжину інтервалу $[t_1, t_2]$:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t) s(t+\tau) dt.$$

АКФ може бути обчислена і для слабо затухаючих сигналів з нескінченною енергією, як середнє значення скалярного добутку сигналу і його копії при збільшенні інтервалу визначення сигналу до нескінченності:

$$B_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s(t) s(t + \tau) dt.$$

АКФ у даному випадку має фізичну розмірність потужності, і дорівнює середній взаємній потужності сигналу і його копії у функціональній залежності від зсуву копії.

АКФ періодичних сигналів

Енергія періодичних сигналів нескінченна, тому АКФ періодичних сигналів обчислюється для одного періоду T , з усередненням скалярного добутку сигналу і його зміщеної копії в межах цього періоду:

$$B_s(\tau) = (1/T) \int_0^T s(t) s(t-\tau) dt.$$

Математично більш строгий вираз має наступний вигляд:

$$B_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s(t) s(t - \tau) dt.$$

При $\tau=0$ значення нормованої на період АКФ дорівнює середній потужності сигналів у межах періоду.

АКФ дискретних сигналів

При інтервалі дискретизації даних $\Delta t = \text{const}$ обчислення АКФ виконується на інтервалах $\Delta \tau = \Delta t$ і часто може бути виражена, як дискретна функція номерів n зсуву відліків n :

$$B_s(n) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \cdot s_{k-n}.$$

Дискретні сигнали зазвичай задаються у вигляді числових масивів визначеної довжини з нумерацією відліків $k = 0, 1, \dots, N$, а обчислення дискретної АКФ виконується тільки для додатних значень τ (через симетричність) з урахуванням довжини масивів по формулі:

$$B_s(n) = \frac{N \cdot \Delta t}{N+1-n} \sum_{k=0}^{N-n} s_k \cdot s_{k-n}.$$

Множник $N/(N+1-n)$ у даній функції є поправочним коефіцієнтом, який враховує поступове зменшення кількості значень, які перемножуються та для яких розраховується сума зміщених послідовностей (від N до $N-n$) у міру збільшення зсуву n . Без цієї добавки для нецентрованих сигналів у значеннях АКФ з'являється тренд підсумовування середніх значень.

Практично, дискретна АКФ має такі ж властивості, як і неперервна АКФ. Вона також є парною, а її значення при $n = 0$ дорівнює потужності дискретного сигналу.

Враховуючи, що час розрахунків АКФ дискретних сигналів для розглядаємих класів функцій значно менший, ніж для неперервних сигналів, доцільно спочатку розрахувати АКФ дискретного сигналу і отримані точки з'єднати лініями.

Взаємно кореляційна функція (ВКФ)

ВКФ різних сигналів (cross-correlation function, CCF) описується як міра подібності форми двох сигналів, так і їхнього взаємного розташування друг щодо друга по координаті (незалежній змінній). Узагальнюючи формулу (3.1) автокореляційної функції для двох різних сигналів $s(t)$ і $u(t)$, одержуємо наступний скалярний добуток сигналів:

$$B_{su}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) u(t+\tau) dt. \quad (3.2)$$

Взаємна кореляція сигналів характеризує визначену кореляцію явищ і фізичних процесів, відображуваних даними сигналами, і може служити мірою "стійкості" даного взаємозв'язку при роздільній обробці сигналів у різних пристроях. Коли сигнали $s(t)$ і $u(t)$ у початковому стані ортогональні, то ВКФ служить мірою стійкості ортогональності сигналів відносно зсуву сигналів у часі.

При заміні змінної $t = t-\tau$ у формулі (3.2), одержимо:

$$B_{su}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau) u(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) s(t-\tau) dt = B_{us}(-\tau).$$

Звідки маємо, що для ВКФ не виконується умова парності, $B_{su}(\tau) \neq B_{su}(\tau)$, тобто ВКФ може бути несиметричною відносно $t = 0$, і значення ВКФ не обов'язково буде мати максимум при $t = 0$.

Для періодичних сигналів поняття ВКФ зазвичай не застосовується, за винятком сигналів з однаковим періодом, наприклад, сигналів входу і виходу систем при вивченні характеристик систем.

ВКФ дискретних сигналів

При інтервалі дискретизації даних $\Delta t = \text{const}$ обчислення ВКФ виконується по інтервалах $\Delta \tau = \Delta t$ і зазвичай записується, як дискретна функція номерів зсуву відліків $n \Delta \tau$:

$$B_{su}(n) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \cdot u_{k-n}.$$

Розрахунок АКФ і ВКФ дискретних сигналів за допомогою матриць

АКФ і ВКФ (при однаковій розрядності) дискретних сигналів можуть бути також обчислені за допомогою квадратної матриці (табл. 3.1), елементи якої дорівнюють добуткам типу $a_n \cdot a_k^*$. Кожен елемент матриці, розташований на перетині n-го рядка і k-го стовпця, дорівнює добутку елемента a_n верхнього рядка й елемента a_k^* лівого стовпця (табл.3.1). При $\left\{a_n^*\right\} = \left\{a_k\right\}$ маємо матрицю для обчислення автокореляційної функції. Сума елементів головної діагоналі (слід матриці) дорівнює $B_a(0)$. Елементи головної діагоналі в таблиці з'єднані суцільною лінією. Переходячи послідовно з діагоналі на діагональ, одержуємо значення $B_a(n)$ для $-(N-1) \leq n \leq (N-1)$. (елементи бічних діагоналей з'єднані пунктирними лініями).

Якщо кодова послідовність $\left\{a_n^*\right\} \neq \left\{a_k\right\}$, то виходить матриця для обчислення взаимнокореляційної функції.

Табл. 3.1

$a_k \backslash a_n$	a_1	a_2	...	a_i	...	a_{N-1}	a_N	
a_1^*	$a_1 \cdot a_1^*$	$a_2 \cdot a_1^*$...	$a_i \cdot a_1^*$...	$a_{N-1} \cdot a_1^*$	$a_N \cdot a_1^*$	
a_2^*	$a_1 \cdot a_2^*$	$a_2 \cdot a_2^*$...	$a_i \cdot a_2^*$...	$a_{N-1} \cdot a_2^*$	$a_N \cdot a_2^*$	$B_a(N-1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
a_i^*	$a_1 \cdot a_i^*$	$a_2 \cdot a_i^*$...	$a_i \cdot a_i^*$...	$a_{N-1} \cdot a_i^*$	$a_N \cdot a_i^*$	
\vdots	
a_{N-1}^*	$a_1 \cdot a_{N-1}^*$	$a_2 \cdot a_{N-1}^*$...	$a_i \cdot a_{N-1}^*$...	$a_{N-1} \cdot a_{N-1}^*$	$a_N \cdot a_{N-1}^*$	$B_a(1)$
a_N^*	$a_1 \cdot a_N^*$	$a_2 \cdot a_N^*$...	$a_i \cdot a_N^*$...	$a_{N-1} \cdot a_N^*$	$a_N \cdot a_N^*$	$B_a(0)$

Дана матриця записана для усіченої (не періодичної) послідовності (сигналу). Часто АКФ та ВКФ розраховують для циклічних (періодичних) послідовностей. У цьому випадку, в залежності від виду АКФ чи ВКФ, ряд a_n чи стовпчик a_k^* періодично повторюють.

Комплементарні сигнали

Комплементарні сигнали – це сигнали A_1 (основний) і A_2 (доповнюючий), АКФ яких після їх проходження через схему рис. 3.1 мають тільки одну ненульову складову при $\tau = 0$, а саме $B(0)$.

$$B_1(n) + B_2(n) = \begin{cases} 2 \cdot i, & n = 0; \\ 0, & n = \pm 1, \dots, \pm(N-1). \end{cases}, \text{ де } i - \text{кількість розрядів сигналу.}$$

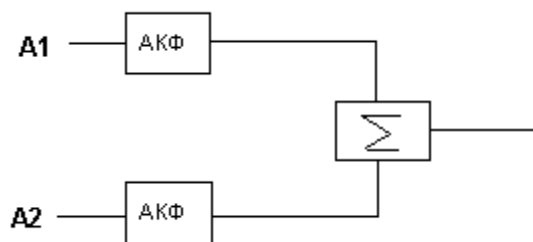


Рис.3.1. Схема для комплементарних сигналів

Породжені системи сигналів

Породженим сигналом називається сигнал, що виходить в результаті перемножування двох сигналів. У випадку дискретних сигналів перемножування повинне здійснюватися поелементно або, як частіше кажуть, посимвольно. Система, що складається з породжених сигналів, називається породженою.

Серед породжених систем особливе значення мають системи в якості основи для яких використовується деяка система сигналів, автокореляційні

властивості якої не цілком задовольняють вимогам до АКФ, але яка має визначені переваги з погляду скритності, завадостійкості та простоти формування й обробки. Таку систему будемо називати вихідною. Потім вибирається сигнал, що має визначені властивості, а саме оптимальну АКФ. Такий сигнал будемо називати породжуючий. Перемножуючи кожний елемент породжуючого сигналу на кожен елемент сигналу основи, одержуємо породжену систему. Породжуючий сигнал вибирається таким чином, щоб породжена система була набагато краще вихідної, тобто щоб вона мала кращі автокореляційні властивості.

Оцінити ступінь зміни АКФ можна по такому відношенню:

$$\eta_i = \frac{B_i(n)_{\max}}{B_i(0)}, \text{ де } i = 1 - \text{для основи, } i = 2 - \text{для породженого сигналу, } B(n)_{\max} -$$

значення максимального піку АКФ при $n \neq 0$.

Домашнє завдання

1. Розрахувати та побудувати АКФ для 11-позиційного коду Баркера (табл. 3.2а), для неперіодичного та періодичного сигналів.

Табл. 3.2а

Код Баркера (M=11)	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
Код Уїлларда (M=11)	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1

2. Розрахувати та побудувати АКФ для 11-позиційного коду Уїлларда (табл. 3.2), для неперіодичного та періодичного сигналів.
3. Провести порівняння результатів, одержаних у п. 9 та 10 по показнику розпізнавання.
4. Розрахувати та побудувати ВКФ для 11-позиційного коду Уїлларда та 11-позиційного коду Баркера (для неперіодичного сигналу). Визначити показник розпізнавання.
5. Розрахувати та побудувати ВКФ для 13-позиційного коду Уїлларда (табл. 3.2б) та 11-позиційного коду Уїлларда (для неперіодичного сигналу). Визначити показник розпізнавання.

Табл. 3.2б

Код Баркера (M=13)	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1
Код Уїлларда (M=13)	1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1

6. Розрахувати та побудувати ВКФ для 13-позиційного коду Баркера (табл. 3.2б) та 11-позиційного коду Баркера (для неперіодичного сигналу (табл. 3.2а)). Визначити показник розпізнавання.
7. Провести порівняння результатів, одержаних у п. 12,13 та 14 по показнику розпізнавання.
8. Підготувати необхідні дані для виконання лабораторної роботи (розрахунку АКФ та ВКФ сигналів) для вашого варіанту (таблиці 3.3, 3.5 та 3.7).

Порядок виконання роботи

Згідно до номеру варіанту (табл. 3.3):

1. Розрахувати та побудувати АКФ заданого сигналу (для випадків періодичного та неперіодичного сигналу).
 2. Розрахувати та побудувати ВКФ заданих сигналів.
 3. Розрахувати та побудувати АКФ заданих комплементарних сигналів, а також АКФ цих же сигналів після проходження через схему табл. 3.5.
- Використовуючи задану породжуючу послідовність (табл. 3.7) та вихідний сигнал (див. п.1) розрахувати й побудувати АКФ породженої послідовності. Оцінити ступінь зміни АКФ, використовуючи η_i .

Варіанти

Табл. 3.3

№ варіанта	Функція для розрахунку АКФ	Функції для розрахунку ВКФ	Комплементарні сигнали (табл. 3.5)	Породжуючий сигнал (Табл.3.7)
1	$Wal(8, \theta)$	$Wal(8, \theta), Wal(15, \theta)$	1	1
2	$Wal(9, \theta)$	$Wal(9, \theta), Wal(14, \theta)$	2	1
3	$Wal(10, \theta)$	$Wal(10, \theta), Wal(13, \theta)$	3	1
4	$Wal(11, \theta)$	$Wal(11, \theta), Wal(12, \theta)$	4	1
5	$Wal(12, \theta)$	$Wal(12, \theta), Wal(8, \theta)$	1	1
6	$Wal(13, \theta)$	$Wal(13, \theta), Wal(9, \theta)$	2	1
7	$Wal(14, \theta)$	$Wal(14, \theta), Wal(10, \theta)$	3	1
8	$Wal(15, \theta)$	$Wal(15, \theta), Wal(11, \theta)$	4	1
9	$Wal(8, \theta)$	$Wal(8, \theta), Wal(14, \theta)$	1	1
10	$Wal(9, \theta)$	$Wal(9, \theta), Wal(12, \theta)$	2	1
11	$Wal(10, \theta)$	$Wal(10, \theta), Wal(12, \theta)$	3	1
12	$Wal(11, \theta)$	$Wal(11, \theta), Wal(10, \theta)$	4	1

Табл. 3.4

№ варіанта	Функція для розрахунку АКФ	Функції для розрахунку ВКФ	Комплементарні сигнали (табл. 3.6)	Породжуючий сигнал (табл. 3.7)
13	$Wal(16, \theta)$	$Wal(16, \theta), Wal(28, \theta)$	1	2
14	$Wal(17, \theta)$	$Wal(17, \theta), Wal(27, \theta)$	2	2
15	$Wal(18, \theta)$	$Wal(18, \theta), Wal(26, \theta)$	3	2
16	$Wal(19, \theta)$	$Wal(19, \theta), Wal(25, \theta)$	1	2
17	$Wal(20, \theta)$	$Wal(20, \theta), Wal(24, \theta)$	2	2
18	$Wal(21, \theta)$	$Wal(21, \theta), Wal(23, \theta)$	3	2
19	$Wal(22, \theta)$	$Wal(22, \theta), Wal(21, \theta)$	1	2
20	$Wal(23, \theta)$	$Wal(23, \theta), Wal(22, \theta)$	2	2
21	$Wal(24, \theta)$	$Wal(24, \theta), Wal(20, \theta)$	3	2
22	$Wal(25, \theta)$	$Wal(25, \theta), Wal(19, \theta)$	1	2
23	$Wal(26, \theta)$	$Wal(26, \theta), Wal(18, \theta)$	2	2
24	$Wal(27, \theta)$	$Wal(27, \theta), Wal(17, \theta)$	3	2
25	$Wal(28, \theta)$	$Wal(28, \theta), Wal(16, \theta)$	1	2

Табл. 3.5

Комплементарні сигнали – Рівень 1

1a	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
1b	1	1	1	-1	1	1	-1	1
2a	1	1	1	1	1	-1	-1	1
2b	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
3a	1	1	1	1	-1	1	1	-1
3b	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1
4a	1	1	-1	1	1	1	1	-1
4b	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1

Табл. 3.6

Комплементарні сигнали –

1a	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
1b	1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1
2a	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1
2b	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1
3a	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1
3b	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1

Табл.3.7

Породжуючий сигнал 1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
Породжуючий сигнал 2	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1

Контрольні запитання

1. В чому перевага сигналів Уїлларда перед сигналами Баркера?
2. Коли використовуються комплементарні сигнали? Представити блок-схеми.
3. Властивості АКФ.
4. Особливості ВКФ сигналів.
5. Як зменшити вірогідність пропуску синхронізуючого сигналу?
6. Як покращити АКФ сигналів?
7. Критерії визначення цифрових сигналів з оптимальною АКФ.
8. Визначити $B(0)$ для $wal(m, \theta)$ и $wal(n, \theta)$.
9. Визначення АКФ та ВКФ дискретних сигналів.
10. Як маючи ВКФ дискретних сигналів (U_{1_k} та U_{2_k}) одержати ВКФ неперервних сигналів (U_1 та U_2)?
11. Дати визначення породжуючому сигналу.
12. Як отримати породжуючий сигнал?
13. АКФ і ВКФ періодичних та неперіодичних складних сигналів.
14. Побудова залежностей АКФ і ВКФ неперервних сигналів по даним для АКФ і ВКФ відповідних дискретних сигналів.

Приклади виконання розділів лабораторної роботи

Приклад 1

Розрахуємо АКФ п'ятирозрядного коду Баркера заданого своїми відліками (1 1 1 -1 1) (рис. 3.2). Код Баркера завдяки своїм властивостям використовується в системі синхронізації.

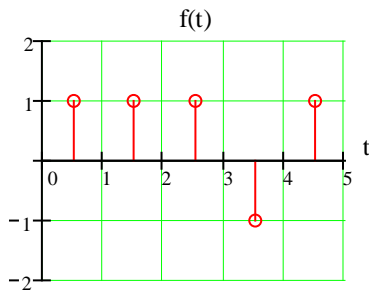


Рис. 3.2. П'яти розрядний код Баркера заданий своїми відліками

Для розрахунку АКФ скористаємося матрицею, що представлена в таблиці 3.8. АКФ п'яти розрядного коду Баркера представлена нижче на рис. 3.3.

Табл. 3.8

	1	1	1	-1	1	
1	1	1	1	-1	1	
1	1	1	1	-1	1	$B(4)=1$
1	1	1	1	-1	1	$B(3)=0$
-1	-1	-1	-1	1	-1	$B(2)=1$
1	1	1	1	-1	1	$B(1)=0$
						$B(0)=5$

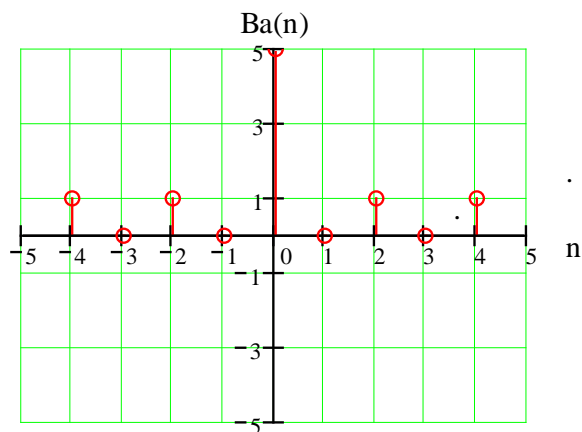


Рис. 3.3. АКФ п'ятирозрядного коду Баркера

Приклад 2

Розрахуємо АКФ п'ятирозрядного коду Уїлларда заданого своїми відліками $(1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1)$ (рис. 3.4). Код Уїлларда зазвичай також використовується як синхронізує слово.

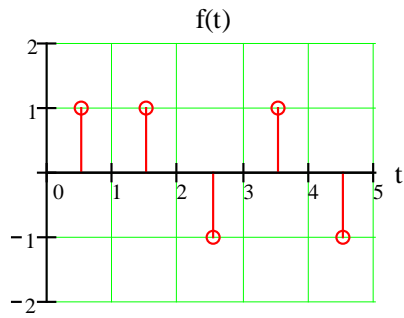


Рис. 3.4. П'ятирозрядний код Уїлларда заданий своїми відліками

Для розрахунку АКФ скористаємося матрицею, що представлена в таблиці 3.9. АКФ п'ятирозрядного коду Уилларда представлена нижче на рис. 3.5.

Табл. 3.9

	1	1	-1	1	-1	
1	1	1	-1	1	-1	
1	1	1	-1	1	-1	$B(4) = -1$
-1	-1	-1	1	-1	1	$B(3) = 0$
1	1	1	-1	1	-1	$B(2) = 1$
-1	-1	-1	1	-1	1	$B(1) = -2$
						$B(0) = 5$

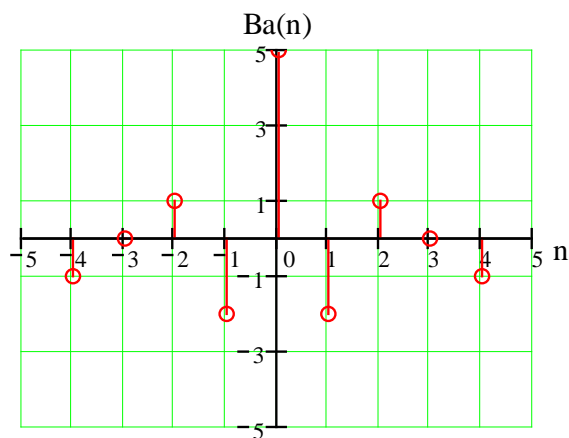


Рис. 3.5. АКФ п'ятирозрядного коду Уилларда

Приклад 3

Розрахуємо АКФ функції $Wal(6,k)$ (рис. 3.6)

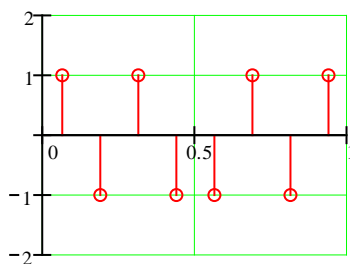


Рис. 3.6. Функція $Wal(6, k)$

Для розрахунку АКФ скористаємося матрицею, що представлена в таблиці 3.10. АКФ функції $Wal(6, k)$ представлена нижче на рис. 3.7.

Табл. 3.10

	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	$B(7) = 1$
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	$B(6) = -2$
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	$B(5) = 3$
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	$B(4) = -4$
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	$B(3) = 1$
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	$B(2) = 2$
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	$B(1) = -5$
									$B(0) = 8$

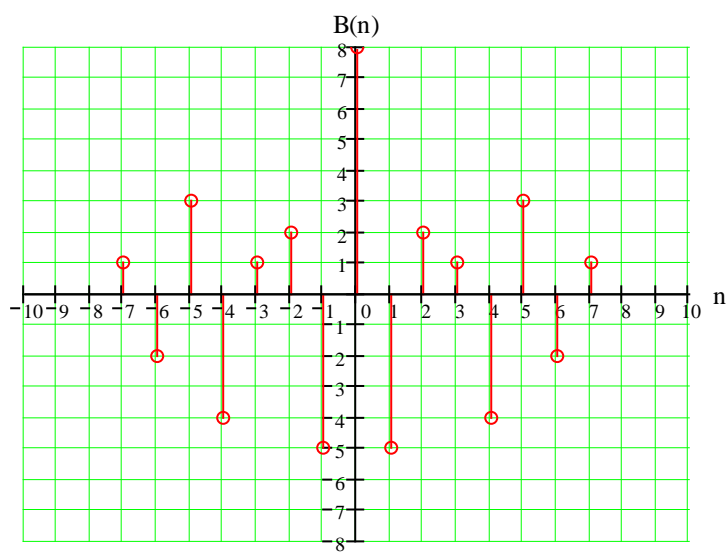


Рис.3.7. АКФ функції $Wal(6, k)$

Приклад 4

Розрахуємо ВКФ функцій $Wal(6, \theta)$ (рис.3.6) та $Wal(4, \theta)$ (рис. 3.8).

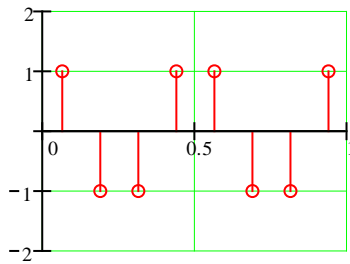


Рис. 3.8. Функція $Wal(4, \theta)$

Для розрахунку АКФ скористаємося матрицею, що представлена в таблиці 3.11. АКФ функції $Wal(6, \theta)$ представлена нижче на рис. 3.9.

Табл. 3.11

	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	$B(7) = 1$
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	$B(6) = -2$
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	$B(5) = 1$
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	$B(4) = 0$
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	$B(3) = -1$
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	$B(2) = 2$
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	$B(1) = -1$
									$B(0) = 0$

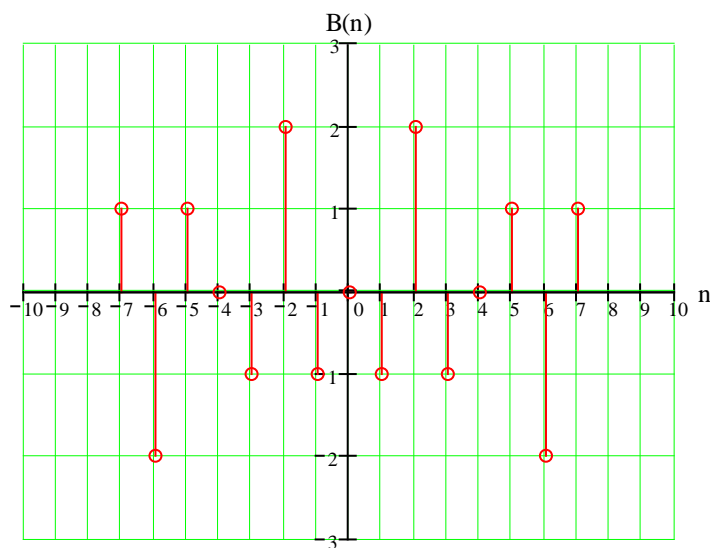


Рис. 3.9. ВКФ функцій $Wal(6, \theta)$ та $Wal(4, \theta)$

Приклад 5

Розрахунок АКФ і ВКФ неперервних функцій Уолша можна провести безпосередньо скориставшись формулами 3.1 й 3.2 або у 2 етапи. Спочатку знайти АКФ (ВКФ) відповідних дискретних сигналів, а пізніше з'єднати отримані точки лініями. Другий спосіб має більші переваги, оскільки займає набагато менше машинного часу. Приклади АКФ для $wal(6, \theta)$ та ВКФ для $wal(6, \theta)$ и $wal(4, \theta)$ представлені на рис. 3.10 та рис. 3.11.

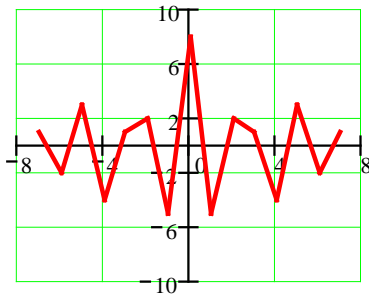


Рис. 3.10. АКФ функції $wal(6, \theta)$

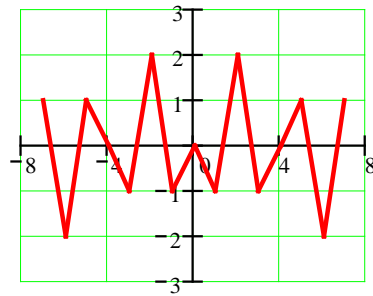


Рис.3.11. ВКФ функції $wal(6, \theta)$ и $wal(4, \theta)$

Приклад 6

Розрахуємо АКФ чотирирозрядних комплементарних сигналів, які задані своїми відліками.

A_1 – основний сигнал: 1 1 1 – 1

A_2 – доповнюючий сигнал: 1 1 – 1 1

A_1 , A_2 – 4-ьох позиційні сигнали Баркера.

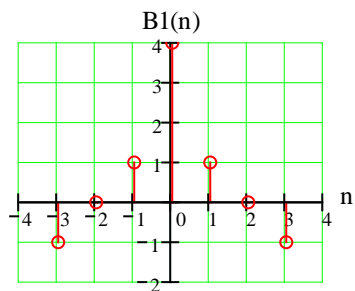
Для розрахунку АКФ скористаємося матрицею, що представлена в таблиці 3.12 та 3.13. АКФ комплементарних сигналів представлені нижче на рис. 3.12 а, б.

Табл. 3.12

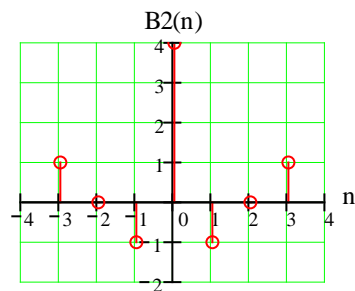
	1	1	1	-1	
1	1	1	1	-1	
1	1	1	1	-1	$B(3) = -1$
1	1	1	1	-1	$B(2) = 0$
-1	-1	-1	-1	1	$B(1) = 1$
					$B(0) = 4$

Табл. 3.13

	1	1	-1	1	
1	1	1	-1	1	
1	1	1	-1	1	$B(3) = 1$
-1	-1	-1	1	-1	$B(2) = 0$
1	1	1	-1	1	$B(1) = -1$
					$B(0) = 4$



а)



б)

Рис 3.12. АКФ: а) основного сигнала, б) доповнюючого сигналу

Якщо ці комплементарні сигнали пропустити через схему, що представлена на рис. 3.1, то отримаємо АКФ представлену на рис. 3.13.

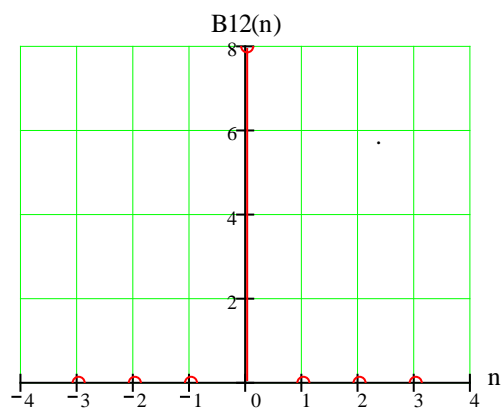


Рис. 3.13. АКФ комплементарних сигналів після проходження через схему рис.3.1.

Приклад 7

Розрахуємо АКФ похідного сигналу. Розглянемо АКФ функції $Wal(13,k)$ і її ж АКФ після перемножування на породжуючий сигнал $f(k)$ (табл. 3.14).

Табл 3.14

Заданий сигнал $Wal(13,k)$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
Породжуючий сигнал $f(k)$	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
Породжений сигнал	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1
АКФ заданого сигналу	16	-10	5	0	-5	4	-5	6	-7	4	-1	-2	5	-2	1	0
АКФ породженого сигналу	16	6	-3	-2	-3	-8	-3	2	1	0	3	0	-3	0	3	0

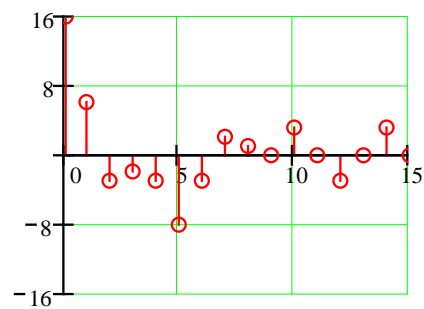
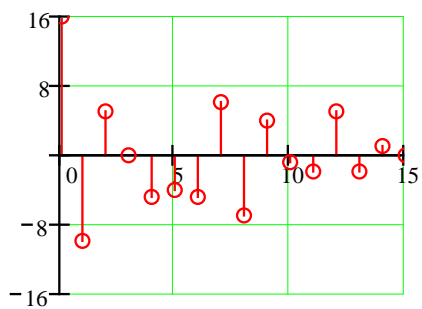


Рис. 3.14. АКФ заданого сигналу Рис.3.15. АКФ породженого сигналу

Як видно з рис.3.14 та рис.3.15 породжений сигнал має кращу АКФ, ніж АКФ заданого сигналу.

ЗМІСТ

Список скорочень.....	ст.3
Порядок виконання лабораторної роботи та оформлення протоколів.....	ст.3
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1.....	ст.5
Теоретичні відомості.....	ст.5
Домашнє завдання.....	ст.15
Порядок виконання.....	ст.16
Варіанти виконання.....	ст.16
Контрольні запитання.....	ст.18
Приклади виконання розділів лабораторної роботи.....	ст.19
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2.....	ст.34
Теоретичні відомості.....	ст.34
Домашнє завдання.....	ст.44
Порядок виконання.....	ст.46
Варіанти виконання.....	ст.46
Контрольні запитання.....	ст.47
Приклади виконання розділів лабораторної роботи.....	ст.48
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3.....	ст.58
Теоретичні відомості.....	ст.58
Домашнє завдання.....	ст.64
Порядок виконання.....	ст.65
Варіанти виконання.....	ст.66
Контрольні запитання.....	ст.68
Приклади виконання розділів лабораторної роботи.....	ст.69

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. – М.: Госэнергоиздат, 1956. – 150 с.
2. Шеннон К. Математическая теория связи. – В. кн.: К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике: Пер. с англ./Под ред. Р.Л. Добрушина, О. Б. Лупанова. – М.: ИЛ, 1963, с. 243–332.
3. Авгієв Д. В. Основы теории линейной селекции. – Научно-технический сборник ЛЭИС, 1935, №10.
4. Варакін Л. Е. Теория систем сигналов. – М.: Сов. радио, 1978. – 304 с.
5. Поляков П. Ф. Широкополосные аналоговые системы связи со сложными сигналами. – М.: Радио и связь, 1991. – 152 с.
6. Діксон Р. К. Широкополосные системы: Пер. с англ./Под ред. В. И. Журавлева. – М.: Связь, 1979. – 302 с.
7. Хармут Х. Ф. Передача информации ортогональными функциями. – М.: Связь, 1975. – 272 с.
8. Гоноровський І.С., Демін М.П. Радіотехнічні цепи і сигнали: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1994. – 450 с.
9. Бабак В.П., та ін. Обробка сигналів. Підручник. – К.: Либідь, 1999. – 392 с.
10. Залманзон П.А. Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
11. Белецький А.Я. Бабак В.П. Детерминированные сигналы и спектры. – К.: КИТ, 2002. – 502 с.
12. Хармут Х. Ф. Теория секвентного анализа. – М.: Мир. 1980. – 574 с.
13. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2. испр. Пер с англ. – М.: Изд. Дом. «Вильямс», 2004. – 1104 с.
14. Варакін Л. Е. Теория сложных сигналов. – М.: Сов. Радио, 1970. – 375 с.
15. Яценко А. А. Введение в криптографию/Под общ. ред. В.В. Яценко. – М.: МЦМНО, “ЧеРо”, 1998. – 345 с.
16. Хармут Х. Ф. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи. – М.: Радио и связь, 1985. – 376 с.
17. Сарвате Д.В., Перслі М.Б. Псевдослучайные и родственные последовательности. ТИИЭР. – 1990. – Т.68, №5.
18. Урядников Ю.Ф., Аджемов С.С. Сверхширокополосная связь. Теория и применение. – М.: СЛОН_ПРЕСС, 2005. – 368 с. – (Серия «Библиотека студента»).
19. Трахтман А. М. Введение в обобщенную спектральную обработку сигналов. М.: Сов. Радио, 1972. – 352 с.
20. Вишневський В.М. и др. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с.
21. Іпатов В.П. и др. Системы мобильной связи. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 272 с.